Расчет конструкций переменной толщины методом наискорейшего спуска

В.В.Петров, СГТУ им. Гагарина Ю.А., Саратов

Д.А.Пименов, СГТУ им. Гагарина Ю.А., Саратов

Р.В.Мищенко, СГТУ им. Гагарина Ю.А., Саратов

В статье обсуждается методика расчёта элементов конструкций переменной толщины. Такие конструктивные элементы описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, для реализации которых необходимо иметь надёжный метод расчёта, позволяющий получить достаточно точное решение. Наиболее эффективным методом для расчёта таких конструкций является метод наискорейшего спуска, разработанный Л.В. Канторовичем. В рамках этой статьи идея метода изложена на примере решения задач изгиба балки и пластинки переменной толщины.

Приведена последовательность расчёта конструкции переменной толщины МНС на примере статически неопределимой балки, где в качестве начального приближения использовалось уравнение изгиба балки постоянного поперечного сечения. Затем этот метод был обобщён на более сложную двумерную конструкцию – пластинку переменной толщины. Была решена проблема построения начального приближения при решении дифференциального уравнения в частных производных. В качестве примера была рассмотрена квадратная в плане пластинка, шарнирно опёртая по контуру. Результаты расчёта сравнивались с результатами, полученными методом конечных разностей.

При решении конкретных задач методом наискорейшего спуска было выявлено его принципиальное отличие от прямых методов, таких как, например Рунге-Кутты, Бунд-Галеркина, которое заключается в том, что последовательные приближения при решении задач получаются не в априорно выбранной форме, а в форме, определяемой самой задачей. В МНС решение корректируется качественно в процессе реализации метода, а при решении задачи вариационными методами мы выбираем аппроксимирующую функцию и тем самым задаём конфигурацию решения.

Использование МНС позволяет получать конечные формулы для определения напряжённо деформируемого состояния конструкций переменной толщины, что позволит оперативно осуществлять их вариантное проектирование.

Ключевые слова: пластинка, метод наискорейшего спуска, метод конечных разностей, ограниченный оператор, невязка решения.

Calculation of Constructions of Variable Thickness by Method of Steepest Descent

V.V.Petrov, SSTU, Saratov

D.A.Pimenov, SSTU, Saratov

R.V.Mishenko, SSTU, Saratov

The technique of calculation of structural elements of variable thickness is discussed in the article. Such constructive

elements are described by differential equations with variable coefficients, for the implementation of which it is necessary to have a reliable calculation method that allows obtaining a fairly accurate solution. The most effective method for calculating such structures is the steepest descent method, developed by L.V. Kantorovich. Within the framework of this article, the idea of the method is set forth in the example of solving problems of bending a beam and a plate of variable thickness.

A sequence is given for calculating the design of a variable MSD thickness using the example of a statically indeterminate beam, where the bending equation for a beam of constant cross section was used as the initial approximation. Then this method was generalized to a more complex two-dimensional construction – a plate of variable thickness. The problem of constructing the initial approximation for solving a partial differential equation was solved. As an example, we considered a square plate in plan, hinged on the contour. The results of the calculation were compared with the results obtained by the finite difference method.

In solving specific problems by the method of steepest descent, it was revealed that it differs from direct methods, such as, for example, Ritz-Timoshenko, Bubnov-Galerkin, which consists in the fact that successive approximations in solving problems are not obtained in a priori chosen form, but in the form, determined by the problem itself. In the MSD, the solution is corrected qualitatively in the course of implementing the method, and when solving the problem by variational methods, we choose the approximating function and thereby set the solution configuration.

The use of the MSD makes it possible to obtain finite formulas for determining the stress-strain state of structures of variable thickness, which will allow them to quickly implement their variant design.

Keywords: plate, method of steepest descent, finite-difference method, bounded operator, misclosure of decision.

В строительной практике широкое применение находят конструкции, которые по соображениям архитектурной выразительности или по экономическим критериям имеют переменную толщину. Такие конструктивные элементы описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, для реализации которых необходимо иметь надёжный метод расчёта, позволяющий получить достаточно точное решение, что полезно при варианном про-

ектировании. Весьма эффективным представляется метод, предложенный в 1948 году Л.В. Канторовичем и названный им градиентным методом или методом наискорейшего спуска (МНС) [1]. В последующие годы был опубликован ряд работ, где строгими математическими методами была доказана состоятельность метода и выявлены его потенциальные возможности в теоретических исследованиях задач, касающихся нахождения минимума квадратичных функционалов и связанных с ним линейных проблем. Целью данной статьи является изучение возможностей этого метода при расчёте конструкций переменной толщины.

Метод был разработан Л.В. Канторовичем применительно к квадратичным функционалам, то есть к ограниченным операторам. Известно, что поиск экстремума функционала эквивалентен решению соответствующего дифференциального уравнения, то есть исследованию неограниченных операторов.

Л.В. Канторовичу принадлежит идея В-ограниченных операторов, которая состоит в том, что сложный линейный неограниченный оператор A можно ограничить простым линейным неограниченным оператором B . Л.В. Канторовичем доказана теорема: если оператор A положительно определён и B – ограничен, то есть выполняются условия:

$$m(Bu, u) \leq (Au, u) \leq M(Bu, u), \quad 0 < m \leq M < +\infty, \quad (1)$$

то имеет место В-сходимость процесса наискорейшего спуска к решению исходного уравнения с быстротой геометрической прогрессии. Эта теорема доказана для случая, когда рассматриваемая задача описывается линейными дифференциальными уравнениями. Здесь и далее используется принятое обозначение скалярного произведения двух функций f_1 и f_2 в виде (f_1, f_2) .

В соответствии с этой теоремой возникает проблема построения симметричного, положительно полуограниченного оператора B , родственного оператору A . Область определения оператора B должна совпадать с областью определения оператора A , кроме того должно выполняться неравенство (1). Рядом авторов показано, что при решении задач строительной механики В-ограниченность оператора A обеспечивается, если упругая система, описываемая оператором B , является более жёсткой по сравнению с исходной, описываемой оператором A [2]. Поэтому оператор B для конкретной задачи можно построить исходя из инженерных соображений, а быстрота сходимости метода будет зависеть от удачного выбора оператора B .

Рассмотрим последовательность расчёта конструкции переменной толщины МНС на примере статически неопределимой балки. На первом этапе находим начальное приближение в виде решения уравнения изгиба балки постоянного поперечного сечения, которое в безразмерном виде запишется следующим образом

$$Bu_0 = J_0 \frac{d^4 u_0}{d\xi^4} = p(\xi), \quad (2)$$

здесь $B = J_0 \frac{d^4}{d\xi^4}$ дифференциальный оператор, где J_0 постоянная по длине жёсткость балки; u_0 – начальное приближение прогиба; $p(\xi)$ – заданная поперечная нагрузка; $\xi = x/L$ – безразмерная координата, где L – длина балки. Подставляя начальное приближение в уравнение изгиба балки переменной толщины, определяем невязку решения $F(\xi)$:

$$F(\xi) = Au_0 - p(\xi) = \frac{d^2}{d\xi^2} \left[J(\xi) \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} \right] - p(\xi), \quad (3)$$

где $A = \frac{d^2}{d\xi^2} \left[J(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} \right]$ – исходный неограниченный оператор рассматриваемой задачи. В предположении, что ось координат ξ находится в верхней плоскости балки, переменную жёсткость $J(\xi)$ определяем по формуле:

$$J(\xi) = E \iint_{-h/2}^{h/2} \left[z + \frac{1}{2} h(\xi) \right]^2 dF = E \int_{-h/2}^{h/2} \left[z^2 + zh(\xi) + \frac{1}{4} h^2(\xi) \right] b dz = E \frac{h}{12} N'(\xi),$$

где E – модуль упругости материала балки.

На втором этапе находим корректирующую функцию $Z_1(\xi)$ из дифференциального уравнения

$$J_0 \frac{d^4 Z_1}{d\xi^4} = F(\xi). \quad (4)$$

На третьем этапе вычисляем величину градиента спуска ε_1 по формуле

$$\varepsilon_1 = \frac{(BZ_1, Z_1)}{(AZ_1, Z_1)}, \quad (5)$$

где скалярные произведения (BZ_1, Z_1) – энергия оператора B , и (AZ_1, Z_1) – энергия оператора A , определяются по формулам:

$$(BZ_1, Z_1) = J_0 \int_0^1 \left(Z_1 \frac{d^4 Z_1}{d\xi^4} \right) d\xi, \quad (6)$$

$$(AZ_1, Z_1) = \int_0^1 \left\{ Z_1 \frac{d^2}{d\xi^2} \left[J(\xi) \frac{d^2 Z_1}{d\xi^2} \right] \right\} d\xi. \quad (7)$$

Прогиб в первом приближении МНС с учётом поправки решения запишется следующим образом:

$$u_1(\xi) = u_0(\xi) - \varepsilon_1 Z_1(\xi). \quad (8)$$

Далее процесс итераций повторяется до достижения необходимой точности решения по формуле:

$$u_n(\xi) = u_{n-1}(\xi) - \varepsilon_n Z_n(\xi). \quad (9)$$

Принципиальное отличие метода наискорейшего спуска от прямых методов, например, Рунге-Тимошенко, Бубнова-Галёркина заключается в том, что последовательные приближения получаются не в априорно выбранной форме, а в форме, определяемой самой задачей. При решении задачи вариационными методами мы выбираем аппроксимирующую функцию и тем самым задаём конфигурацию решения. В МНС решение качественно корректируется при реализации процедуры метода.

В качестве примера рассмотрим задачу изгиба балки под действием равномерно распределённой нагрузки p_0 , представленную на рисунке 1, где нижнее очертание балки представляет собой квадратную параболу.

Рис. 1. Балка переменной толщины

Уравнение безразмерной толщины балки имеет вид:

$$h(\xi) = 4\lambda(\xi^2 - \xi) + 1,$$

где $\lambda = \frac{h_1 - h_0}{h_0}$ – безразмерный параметр относительной толщины, с помощью которого можно управлять напряжённо деформированным состоянием конструкции. В качестве примера рассмотрим балку, один конец которой шарнирно опёрт, а другой жёстко закреплён. В этом случае решение уравнения (2) имеет следующий вид:

$$w_0(\xi) = \frac{P_0}{48} (2\xi^4 - 3\xi^3 + \xi^2).$$

По формуле (3) определяем невязку решения:

$$F(\xi) = P_0 [(4\lambda\xi^2 - 4\lambda\xi + 1)(448\xi^4\lambda^2 - 980\xi^2\lambda^2 + 700\xi^2\lambda^2 + 68\xi^2\lambda - 180\xi\lambda^2 - 77\xi\lambda + 12\lambda^2 + 18\lambda + 1) - 1].$$

Решаем дифференциальное уравнение (4) и находим корректирующую функцию Z_1 с точностью до параметра относительной толщины λ :

$$Z_1(\xi) = P_0 [0,352\xi^{10} - 1,9\xi^2\xi^8 + (4,2\xi^3 + 0,5\xi^2)\xi^6 - (4,2\xi^1 + 1,9\xi^2)\xi^7 + (2,4\xi^1 + 3\xi^2 + 0,2\xi)\xi^9 - (0,4\xi^1 + 2,1\xi^2 + 0,7\xi)\xi^7 + (0,5\xi^1 + 0,8\xi)\xi^4 - (0,01\xi^2 - 0,005\xi^1 + 0,24\xi)\xi^4 - (0,012\xi^1 - 0,04\xi^2 + 0,04\xi)\xi^2].$$

Вычисляем энергию оператора B по формуле (6):

$$(BZ_1, Z_1) = P_0^2 f_B(\lambda) 10^{-3},$$

$$f_B(\lambda) = 8,7\lambda^6 - 5,7\lambda^5 + 15,4\lambda^4 - 21\lambda^3 + 12,4\lambda^2.$$

Вычисляем энергию оператора A по формуле (7)

$$(AZ_1, Z_1) = P_0^2 f_A(\lambda) 10^{-3},$$

$$f_A(\lambda) = -0,6\lambda^5 + 5,7\lambda^3 - 24,4\lambda^2 + 60,6\lambda^2 - 93,5\lambda^1 + 89,6\lambda^4 - 49,5\lambda^3 + 12,4\lambda^2.$$

Далее по формуле (5) вычисляем величину градиента спуска и записываем прогиб балки переменной толщины по формуле (8).

На рисунке 2 представлены эпюры изгибающих моментов в рассмотренных балках переменной толщины. Результаты расчёта, полученные в третьем приближении МНС, сравнивались с результатами, полученными МКР при разбиении балки на 512 частей. Результаты практически совпали.

Результаты расчётов показали, что с увеличением параметра λ происходит существенное перераспределение величины изгибающих моментов из центральной зоны к закреплённому краю. С увеличением стрелы подъёма в центральной части балки возникает практически безмоментная зона. Изгибающий момент в закреплении балки увеличился почти в два раза.

Рассмотрим изложенный алгоритм расчёта применительно к двумерной задаче – изгибу пластинки переменной толщины [3]. Так как эта задача описывается уравнением в частных производных, то трудности возникают уже на начальном этапе – построении начального приближения. В качестве примера рассмотрим квадратную в плане пластинку, шарнирно опёртую по контуру. Нагрузка равномерно распределённая. Уравнение изгиба пластинки постоянной толщины в безразмерном виде запишем следующим образом

$$\nabla^4 u_0(\xi, \eta) = P_0, \quad (10)$$

где приняты следующие безразмерные величины:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}, \quad P_0 = 12(1 - \mu^2) \frac{q_0 a^4}{E h_0^3},$$

где $a = b$ – размеры пластинки в плане; h_0 – толщина пластинки на контуре; E – модуль упругости; P_0 – безразмерная нагрузка, μ – коэффициент Пуассона. Следовательно, оператор B будет иметь вид бигармонического оператора.

С учётом принятых обозначений безразмерных величин уравнение изгиба пластинки переменной толщины в безразмерном виде представим следующим образом:

$$\nabla^2 [h^3(\xi, \eta) \nabla^2 u] = P_0. \quad (11)$$

Следовательно, оператор A , будет иметь вид:

$$A = \nabla^2 [h^3(\xi, \eta) \nabla^2], \quad (12)$$

где $h(\xi, \eta)$ переменная толщина пластинки. Вид переменной цилиндрической жёсткости зависит от способа задания переменной толщины. Если, например, переменная толщина пластинки описывается с помощью синусоидального велароида [4], то функция $h(\xi, \eta)$ имеет вид:

$$h(\xi, \eta) = 1 - \lambda \sin(\pi\xi) \sin(\pi\eta).$$

Поперечное сечение пластины идентично изображённой на рисунке 1 балке переменной толщины. Для этого случая граничных условий начальное приближение прогиба можно найти методом двойных тригонометрических рядов. Для этого разложим нагрузку в ряд по синусам

$$P_0(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \sin(\alpha_m \xi) \sin(\beta_n \eta), \quad (13)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$, $n = 1, 2, 3, \dots$ – целые числа, $\alpha_m = m\pi$, $\beta_n = n\pi$, P_{mn} – коэффициенты Фурье, вычисляемые по формуле:

Рис. 2. Эпюры изгибающих моментов при различных λ

$$P_{\text{св}} = 4 \int_0^1 \int_0^1 \{ P_0(\xi, \eta) \sin(\alpha_n \xi) \sin(\beta_m \eta) \} d\xi d\eta \quad (14)$$

Начальное приближение прогиба $u_0(\xi, \eta)$ ищем в виде ряда:

$$u_0(\xi, \eta) = \sum_m \sum_n C_{mn} \sin(\alpha_n \xi) \sin(\beta_m \eta) \quad (15)$$

где C_{mn} – амплитуда прогиба, вычисляемая по формуле:

$$C_{mn} = \frac{P_{mn}}{\pi^4 (m^2 + n^2)^2} \quad (16)$$

Невязка решения имеет вид:

$$F(\xi, \eta) = \nabla^2 [h^3(\xi, \eta) \nabla^2 u_0] - P_0(\xi, \eta). \quad (17)$$

Корректирующая функция Z_1 есть решение дифференциального уравнения

$$\nabla^4 Z_1(\xi, \eta) = F(\xi, \eta), \quad (18)$$

которое по виду совпадает с уравнением (10), но правая часть этого уравнения представляет собой «фиктивную» нагрузку, роль которой выполняет невязка решения. Это уравнение решаем методом двойных тригонометрических рядов. Для этого разложим невязку решения (17) в двойной ряд по синусам:

$$F(\xi, \eta) = \sum_m \sum_n F_{mn} \sin(\alpha_n \xi) \sin(\beta_m \eta), \quad (19)$$

где F_{mn} коэффициенты Фурье, вычисляемые по формуле:

$$F_{mn} = 4 \int_0^1 \int_0^1 \{ [\nabla^2 [h^3(\xi, \eta) \nabla^2 u_0] - P_0(\xi, \eta)] \sin(\alpha_n \xi) \sin(\beta_m \eta) \} d\xi d\eta \quad (20)$$

Величина градиента спуска ε_1 определяется по формуле:

$$\varepsilon_1 = \frac{(BZ_1, Z_1)}{(AZ_1, Z_1)}, \quad (21)$$

где скалярные произведения (BZ_1, Z_1) – энергия оператора B , и (AZ_1, Z_1) – энергия оператора A , определяются по формулам:

$$(BZ_1, Z_1) = \int_0^1 \int_0^1 [\nabla^2 Z_1] Z_1 d\xi d\eta, \quad (22)$$

$$(AZ_1, Z_1) = \int_0^1 \int_0^1 \{ \nabla^2 [h^3(\xi, \eta) \nabla^2 Z_1] Z_1 \} d\xi d\eta. \quad (23)$$

В первом приближении прогиб $u_0(\xi, \eta)$ определяется по формуле:

$$u_0(\xi, \eta) = C_{11} \sin(\pi \xi) \sin(\pi \eta), \quad C_{11} = \frac{P_{11}}{4\pi^4}.$$

Невязка решения $F(\xi, \eta)$ примет вид:

$$F(\xi, \eta) = P_0(2,1\lambda^3 - 5,5\lambda^2 + 3,51\lambda - 3,25) \sin(\pi \xi) \sin(\pi \eta).$$

Найдём корректирующую функцию $Z_1(\xi, \eta)$:

$$Z_1(\xi, \eta) = P_0[7,7\lambda^3 - 14\lambda^2 + 9\lambda - 8,3] 10^{-3} \sin(\pi \xi) \sin(\pi \eta).$$

Вычисляем энергии операторов B и A :

$$(BZ_1, Z_1) = P_0(5,7\lambda^4 - 21\lambda^3 + 32,7\lambda^2 - 37\lambda^1 + 30,6\lambda^0 - 14,6\lambda + 6,7) 10^{-1}$$

$$(AZ_1, Z_1) = P_0(19,4\lambda^5 - 2,6\lambda^4 - 62,9\lambda^3 + 123,3\lambda^2 - 168,2\lambda^1 + 171,2\lambda^0 - 131\lambda^1 + 73,5\lambda^2 - 29,2\lambda + 6,7) 10^{-1}.$$

Используя формулы (18) и (21), найдём поправку к прогибу:

$$\varepsilon_1 Z_1(\xi, \eta) = \frac{8(32,8\lambda^4 - 6,08\pi^2\lambda^2 + 38,4\lambda - 3,6\pi^2)}{\pi^4(16,4\lambda^5 - 6,08\pi^2\lambda^3 + 76,8\lambda - 3,6\pi^2)} P_0 10^{-3} \sin(\pi \xi) \sin(\pi \eta). \quad (24)$$

В первом приближении МНС прогиб пластины примет вид:

$$u_1(\xi, \eta) = \left[C_{11} - \frac{8(32,8\lambda^4 - 6,075\pi^2\lambda^2 + 38,4\lambda - 3,6\pi^2)}{\pi^4(16,4\lambda^5 - 6,075\pi^2\lambda^3 + 76,8\lambda - 3,6\pi^2)} 10^3 \right] \sin(\pi \xi) \sin(\pi \eta). \quad (25)$$

На рисунке 3 представлены эпюры прогибов, нормированные к единице в центре пластинки, а на рисунке 4 эпюры изгибающих моментов вдоль линии $\eta = 0,5$ для пластинки переменной толщины во втором приближении, где результаты совпали с результатами, полученными МКР с сеткой 32×32 . Сравнение кривых показывает качественные изменения, происходящие в эпюрах прогибов с ростом параметра λ .

С ростом параметра λ наблюдается существенное перераспределение изгибающих моментов по длине балки (см. рис. 4). Видно, что с уменьшением толщины пластинки в её центральной части формируется безмоментная зона, а в зонах, примыкающих к контуру, происходит значительное увеличение изгибающих моментов.

На рисунке 5 показана функция $\varphi(\lambda)$, полученная в трёх приближениях МНС. Решение, полученное методом конечных разностей, совпало со вторым приближением МНС. Прогиб пластинки переменной толщины имеет вид:

$$u(\xi, \eta) = \varphi(\lambda) \sin(\pi \xi) \sin(\pi \eta) \quad (26)$$

Рис. 3. Эпюры прогибов, нормированных к единице при различных λ

Рис. 4. Эпюры изгибающих моментов при различных λ

Рис. 5. Изменение амплитуды прогиба φ при различных величинах λ

Для удобства расчётов можно аппроксимировать амплитуду прогиба пластинки $\varphi(\lambda)$ с помощью подходящих математических формул.

Например, для получения конечной формулы можно аппроксимировать амплитуду $\varphi(\lambda)$ полиномиальной зависимостью $\varphi(\lambda) = -0,26\lambda^5 + 0,57\lambda^3 - 0,43\lambda^4 + 0,21\lambda^3 - 0,013\lambda^2 + 0,013\lambda + 0,014$.

Если кривую, полученную в третьем приближении МНС, аппроксимировать показательной, экспоненциальной или степенной зависимостью, то получим следующие формулы:

$$\varphi(\lambda) = 0,011 \cdot 8,82^\lambda, \quad \varphi(\lambda) = 0,011 \cdot e^{2,18\lambda}, \quad \varphi(\lambda) = 0,06 \cdot \lambda^{0,66}$$

Использование МНС позволило получить конечную формулу (26) для определения прогиба пластинки, шарнирно опёртой по периметру, что позволит оперативно осуществлять вариантное проектирование при различных параметрах относительной толщины пластинки.

В решении балки и пластинки переменной толщины содер­жится параметр λ , с помощью которого можно управлять

напряжённо деформированным состоянием конструкции. Принятое уравнение переменной толщины $h(\xi)$, или $h(\xi, \eta)$, конструкции будет влиять на величину концентраторов напряжений на опоре. Например, если использовать для описания переменной толщины половину эллипса, то можно создать плавный переход на границе конструкции, что обеспечит снижение концентраторов напряжений.

В заключении отметим следующие важные преимущества данного метода: во-первых, отпадает необходимость решать уравнения с переменными коэффициентами, а во-вторых, при применении МНС решение качественно улучшается в процессе решения, и нет необходимости создавать аппроксимирующие функции, к виду которых весьма чувствительны популярные вариационные методы.

Литература

1. Канторович Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика / Л.В. Канторович // УМН. – 1948. – Т. 3. – № 6 (28). – С. 89–185.
2. Деркачёв А.А. Общая теория метода мажорантной упругой системы / А.А. Деркачёв. – Душанбе, 1963.
3. Петров В.В. Теория расчета пластинок и оболочек / В.В. Петров. – Саратов: СГТУ им. Гагарина Ю.А., 2014. – С. 163.
4. Кривошапко С.Н. Аналитические поверхности / С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванов, С.Н. Халаби. – М.: Наука, 2006. – С. 544.

Literatura

1. Kantorovich L.V. Funktsional'nyj analiz i prikladnaya matematika / L.V. Kantorovich // UMN. – 1948. – Т. 3. – № 6 (28). – S. 89–185.
2. Derkachev A.A. Obshhaya teoriya metoda mazhorantnoj uprugoj sistemy / A.A. Derkachev. – Dushanbe, 1963.
3. Petrov V.V. Teoriya rascheta plastinok i obolochek / V.V. Petrov. – Saratov: SGTU im. Gagarina Yu.A., 2014. – S. 163.
4. Krivoshapko S.N. Analiticheskie poverhnosti / S.N. Krivoshapko, V.N. Ivanov, S.N. Halabi. – M.: Nauka, 2006. – S. 544.

Петров Владилен Васильевич, 1935 г.р. (Саратов). Доктор технических наук, профессор, академик РААСН. Заведующий кафедрой «Теория сооружений и строительные конструкции» Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А. (410054, Саратов, ул. Политехническая, 77. СГТУ). Сфера научных интересов: разработка методов расчёта строительных конструкций с учётом нелинейных факторов. Тел.: +7 (905) 382-21-23. E-mail: vvp@sstu.ru.

Пименов Дмитрий Алексеевич, 1991 г.р. (Саратов). Аспирант кафедры «Теория сооружений и строительные конструкции» Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А. (410054, Саратов, ул. Политехническая, 77. СГТУ). Сфера научных интересов: разработка методов расчёта строительных конструкций с учётом нелинейных факторов. Тел.: +7 (937) 632-19-12. E-mail: scorpions91@inbox.ru.

Мищенко Роман Викторович, 1991 г.р. (Саратов). Аспирант кафедры «Теория сооружений и строительные конструкции» Саратовского государственного технического университета им. Гагарина Ю.А. (410054, Саратов, ул. Политехническая, 77. СГТУ). Научные интересы: разработка методов расчёта строительных конструкций с учётом нелинейных факторов. Тел.: +7 (987) 338-40-22. E-mail: roman_radon4@mail.ru.

Petrov Vladilen Vasilyevich, born in 1935. (Saratov). Academician of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of "Theory of Structures and Building Constructions" Saratov State Technical University by Gagarin Yu.A. (410054, Saratov, Politechnicheskaya st., 77. SSTU). Scientific interests: development of methods for calculating building structures taking into account nonlinear factors. The address: 410031, Saratov, Naberezhnaya Kosmonavtov, 8, apt. 11. Phone: +7 (905) 382-21-23. E-mail: vvp@sstu.ru.

Pimenov Dmitry Alekseyevich, born in 1991. (Saratov). Post-graduate student of the chair "Theory of Structures and Building Constructions" of the Saratov State Technical University by Gagarin Yu.A. (410054, Saratov, Politechnicheskaya st., 77. SSTU). Scientific interests: development of methods for calculating building structures taking into account nonlinear factors. Address: 413102, Engels, Komarova, 29. Telephone: +7 (937) 632-19-12. E-mail: scorpions91@inbox.ru.

Mischenko Roman Viktorovich, born in 1991. (Saratov). Post-graduate student of the chair "Theory of Structures and Building Constructions" of the Saratov State Technical University by Gagarin Yu.A. (410054, Saratov, Politechnicheskaya st., 77. SSTU). Scientific interests: development of methods for calculating building structures taking into account nonlinear factors. Address: Saratov, Rostovskaya, 38, Apt. 111. Phone: +7 (987) 338-40-22. E-mail: roman_radon4@mail.ru.