

Academia. Архитектура и строительство, № 1, стр. 152–159.

Academia. Architecture and Construction, no. 1, pp. 152–159.

Исследования и теория

Научная статья

УДК 69.01

DOI: 10.22337/2077-9038-2025-1-152-159

О расчёте железобетонных изгибаемых элементов на основе нелинейной деформационной модели

Коянкин Александр Александрович (Красноярск). Кандидат технических наук. Кафедра строительных конструкций и управляемых систем Сибирского федерального университета (660041, Красноярск, пр. Свободный, 79. СФУ). Эл. почта: KoyankinAA@mail.ru

Аннотация. Предложенная в статье методика расчёта железобетонного изгибаемого элемента по нормальному сечению, основанная на непосредственном использовании диаграммы деформирования материалов вида $\sigma(\varepsilon)$, не требующая разделения поперечного сечения на условные полосы, позволяет оценить напряжённо-деформированное состояние элемента на всех стадиях деформирования и применимая для расчёта по 1-ой и 2-ой группам предельных состояний. При этом предлагаемая методика позволяет избегать недостатков, которые присущи расчёту по нелинейной деформационной модели, приведённому в нормативных документах РФ действующих в настоящее время.

Ключевые слова: железобетонные конструкции, нелинейная деформационная модель, напряжённо-деформированное состояние, изгибаемый элемент, предельные деформации, нормальное сечение

Для цитирования. Коянкин А.А. О расчёте железобетонных изгибаемых элементов на основе нелинейной деформационной модели // Academia. Архитектура и строительство. – 2025. – № 1. – С. 152–159. – DOI: 10.22337/2077-9038-2025-1-152-159.

On the Calculation of Reinforced Concrete Bending Elements Based on a Nonlinear Deformation Model

Koyankin Alexander A. (Krasnoyarsk). Candidate of Sciences in Technology. Department of Building Structures and Controlled Systems of Siberian Federal University (79 Svobodny pr., Krasnoyarsk, 660041. SibFU). E-mail: Koyank-inAA@mail.ru

Abstract. The method proposed in the article for calculating a reinforced concrete bendable element according to a normal cross-section, based on the direct use of a material deformation diagram of the type $\sigma(\varepsilon)$, which does not require dividing the cross-section into conditional strips, makes it possible to estimate the stress-strain state of the element at all stages of deformation and is applicable for calculating the 1st and 2nd groups of limit states. At the same time, the proposed technique avoids the disadvantages inherent in the calculation of a nonlinear deformation model, given in the regulatory documents of the Russian Federation currently in force.

Keywords: reinforced concrete structures, nonlinear deformation model, stress-strain state, bending element, ultimate deformations, normal cross section

For citation. Koyankin A.A. On the Calculation of Reinforced Concrete Bending Elements Based on a Nonlinear Deformation Model. In: Academia. Architecture and Construction, 2025, no. 1, pp. 152–159, doi: 10.22337/2077-9038-2025-1-152-159.

В нормативных документах, действующих в Российской Федерации (СП 63.13330 «Бетонные и железобетонные конструкции»¹) предложено два метода расчёта прочности нормального сечения изгибаемых железобетонных конструкций:

- расчёт по прочности нормальных сечений по предельным усилиям;
- расчёт по прочности нормальных сечений на основе нелинейной деформационной модели.

Расчёт по первому методу отличается простотой с точки зрения математических вычислений (система из двух уравнений с двумя неизвестными). Однако сам алгоритм расчёта сопряжён с достаточно большим количеством допущений и эмпирических коэффициентов, которые «нагружают» его дополнительными операциями по определению значений этих коэффициентов, снижая точность результата. И одновременно расчёт по предельным усилиям, предложенный в СП 63.13330, применим только для проверки прочности нормального сечения.

Предложенный в СП 63.13330 метод расчёта по нелинейной деформационной модели подразумевает итерационный процесс вычисления с последовательным приближением до приемлемой сходимости результатов текущего и предыдущего шагов. В процессе вычисления происходит условное разделение поперечного сечения элемента на отдельные малые участки с последующим вычислением соответствующих деформаций и напряжений, осреднённых для каждого слоя. В качестве диаграмм деформирования приняты кусочно-линейные зависимости напряжений и деформаций σ - ε (двух- или трёхлинейные), а также криволинейные диаграммы деформирования бетона, предложенные Н.И. Карпенко. Кроме затратного по времени итерационного процесса вычисления, точность результата существенно зависит от высоты условной полосы разделения поперечного сечения, принимаемой проектировщиком (меньшая величина даёт большую точность, но увеличивает трудоёмкость задачи). Одновременно разделение на условные полосы в большем объёме усложняет расчёт и увеличивает количество итераций с использованием криволинейных диаграмм деформирования. Кусочно-линейные зависимости только отдалённо напоминают реальную диаграмму деформирования бетона и наряду с приведением к осреднённым значениям деформаций в центре каждого малого участка и рядом других факторов в сумме приводят к снижению точности результата. Обозначенное следует отнести к недостаткам предлагаемого в СП 63.13330 метода расчёта по нелинейной деформационной модели.

Несмотря на достаточную изученность теории расчёта железобетонных конструкций по нормальным сечениям, со стороны учёных и инженеров не ослабевает интерес к данной теме исследований (особенно в вопросах нелинейной деформационной модели). Свидетельством тому является регулярно публикуемые научные работы по обозначенной

тематике [1–8]. И действительно, расчёт по нелинейной деформационной модели в перспективе можно использовать для «объединённого» расчёта элементов по 1-ой и 2-ой группам предельных состояний. Для это потребуются провести соответствующие исследования, приведя необходимые обоснования и доказательства возможности применения единой диаграммы деформирования (нормативной, расчётной, осреднённой и т.д.) или применения частных или единого коэффициентов надёжности.

В рамках настоящей статьи предложен метод расчёта железобетонного изгибаемого элемента прямоугольного сечения на основе нелинейной деформационной модели при использовании диаграммы деформирования $\sigma(\varepsilon)$, что позволяет:

- непосредственно применять диаграмму деформирования материалов $\sigma(\varepsilon)$, избегая лишних преобразований;
- отказаться от итерационного процесса выполнения расчёта до приемлемой (интуитивно назначаемой) сходимости результатов текущего и предыдущего шагов;
- не прибегать к условному разделению на отдельные участки (высота которых также назначается интуитивно) поперечного сечения.

Предлагаемые системы уравнений в процессе решения без итераций позволяют определить напряжённо-деформированное состояние (НДС) элемента исходя из действующего усилия и физико-механических свойств материалов.

НДС железобетонного изгибаемого элемента, как известно [9], можно разделить на три стадии (рис. 1):

- стадия 1 характеризуется тем, что относительные деформации бетона крайнего волокна растянутой зоны ε_{bt} не достигают предельных деформаций бетона на растяжение ε_{bt}^* , то есть выдержано соотношение $\varepsilon_{bt} < \varepsilon_{bt}^*$;
- стадия 1а является предельным состоянием стадии 1 и характеризуется достижением, но не превышением предельных деформаций бетона на растяжение ε_{bt}^* , то есть $\varepsilon_{bt} = \varepsilon_{bt}^*$;
- стадия 2 характеризуется образованием трещины, что качественно меняет техническое состояние поперечного сечения элемента (сплошное сечение «превращается» в сечение с трещиной). На конце трещины растянутый бетон находится в предельном состоянии, то есть $\varepsilon_{bt} = \varepsilon_{bt}^*$. Относительные деформации продольной арматуры ε_s и сжатого бетона ε_b не достигли предельных значений ε_s^* и ε_b^* соответственно, то есть справедливы соотношения $\varepsilon_s < \varepsilon_s^*$ и $\varepsilon_b < \varepsilon_b^*$;
- стадия 2а является предельным состоянием стадии 2 и характеризуется достижением, но не превышением как предельных деформаций арматуры на растяжение ε_s^* , то есть $\varepsilon_s = \varepsilon_s^*$, так и предельных деформаций бетона на сжатие ε_b^* , то есть $\varepsilon_b = \varepsilon_b^*$;
- стадия 3 – разрушение конструкции.

Предпосылки и допущениями, необходимые для выполнения расчёта:

- справедлива гипотеза плоских сечений для всего поперечного сечения элемента (неравномерное распределение

¹ <https://docs.cntd.ru/document/554403082>

относительных деформаций растянутой арматуры между трещинами учитывается коэффициентом ψ_s определённого СП 63.13330);

– связь напряжений и деформаций бетона и арматуры принимается в соответствии с диаграммами состояния (деформирования) материалов (расчётными, соответствующими 1-ой и 2-ой группам предельных состояний);

– в качестве критерия разрушения бетона принимается достижение фибровыми волокнами предельных относительных деформаций;

– в качестве критерия исчерпания несущей способности продольной арматуры принимается достижение ею предельных относительных деформаций.

НДС железобетонного изгибаемого элемента (рис. 1 а) на стадии 1 определяется параметрами ε_{bt} , ε_b , ε_s , x (высота сжатой зоны), после нахождения которых и на основании принятого закона деформирования (1) вычисляются напряжения.

Для нахождения обозначенных выше четырёх неизвестных формируется система из четырёх уравнений, получаемая из:

– кинематических соотношений, определённых на основании гипотезы плоских сечений:

$$\frac{\varepsilon_b}{-x} = \frac{\varepsilon_s}{h_0 - x} \text{ и } \frac{\varepsilon_b}{-x} = \frac{\varepsilon_{bt}}{h - x},$$

– уравнения статического равновесия суммы продольных сил, проецируемых на горизонтальную ось $N_b + N_s = 0$. Напряжения в слое бетона на расстоянии y от нейтральной оси составят

$$\sigma_b(y) = \sigma_b\left(\frac{-x}{\varepsilon_b} \varepsilon\right) = -\frac{x}{\varepsilon_b} \sigma_b(\varepsilon),$$

исходя из известных соотношений $r = \frac{-x}{\varepsilon_b}$ – радиус кривизны элемента в рассматриваемом сечении и $y = r\varepsilon = \frac{-x}{\varepsilon_b} \varepsilon$. Тогда

$$N_b = b \int_{-x}^{h-x} \sigma_b(y) dy = -b \frac{x}{\varepsilon_b} \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \sigma_b(\varepsilon) d\varepsilon \quad [10],$$

где ширина b принята постоянной по высоте.

Усилие

$$N_s = \sum_i \int_0^{\varepsilon_s} \sigma_{si}(\varepsilon) A_{si} d\varepsilon = \sum_i A_{si} \int_0^{\varepsilon_s} \sigma_{si}(\varepsilon) d\varepsilon.$$

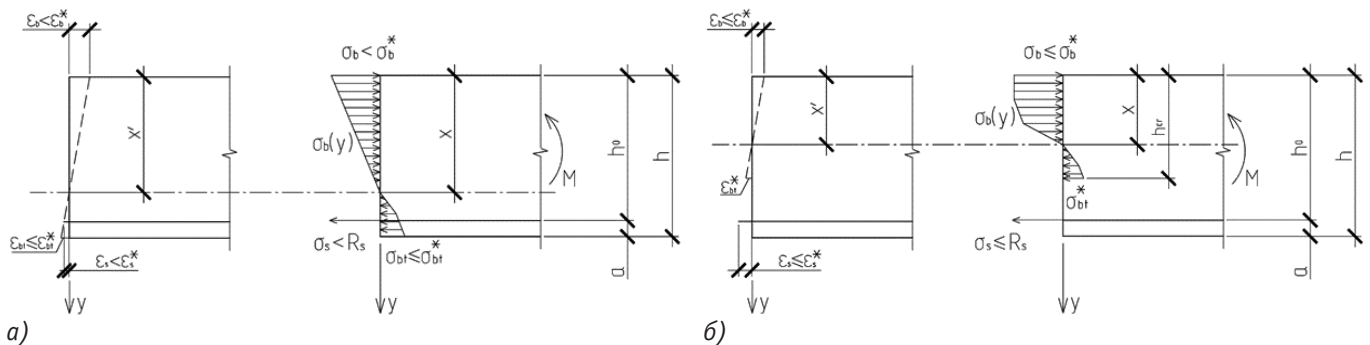


Рис. 1. Стадии НДС изгибаемого элемента: а) стадии 1 и 1 а; б) стадии 2 и 2 а

Итоговое уравнение примет вид:

$$-b \frac{x}{\varepsilon_b} \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \sigma_b(\varepsilon) d\varepsilon + \sum_i A_{si} \int_0^{\varepsilon_s} \sigma_{si}(\varepsilon) d\varepsilon = 0;$$

– уравнения статического равновесия моментов внутренних и внешних сил $M_b + M_s = M$, где изгибающие моменты, воспринимаемые поперечным сечением от усилий N_b и N_s в бетоне M_b и растянутой арматуре M_s при текущем нагружении, определяемые по формулам

$$M_b = b \int_{-x}^{h-x} \sigma_b(y) y dy = b \left(\frac{x}{\varepsilon_b}\right)^2 \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \sigma_b(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = b \left(\frac{x}{\varepsilon_b}\right)^2 \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \sigma_b(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \text{ и}$$

$$M_s = \sum_i \int_0^{\varepsilon_s} \sigma_{si}(\varepsilon) A_{si} (h_{0i} - x) d\varepsilon = \sum_i A_{si} (h_{0i} - x) \int_0^{\varepsilon_s} \sigma_{si}(\varepsilon) d\varepsilon,$$

что приведёт к уравнению

$$b \left(\frac{x}{\varepsilon_b}\right)^2 \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \sigma_b(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + \sum_i A_{si} (h_{0i} - x) \int_0^{\varepsilon_s} \sigma_{si}(\varepsilon) d\varepsilon = M.$$

В итоге получена система (1) из четырёх уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon_b}{-x} = \frac{\varepsilon_s}{h_0 - x} \\ \frac{\varepsilon_b}{-x} = \frac{\varepsilon_{bt}}{h - x} \\ -b \frac{x}{\varepsilon_b} \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \sigma_b(\varepsilon) d\varepsilon + \sum_i \sigma_{si}(\varepsilon_s) A_{si} = 0 \\ b \left(\frac{x}{\varepsilon_b}\right)^2 \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}} \sigma_b(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + \sum_i \sigma_{si}(\varepsilon_s) A_{si} (h_{0i} - x) = M \end{array} \right. \quad (1)$$

включающая четыре неизвестных ε_{bt} , ε_b , ε_s , x , позволяющих описать НДС железобетонного изгибаемого элемента на стадии 1 с учётом реальных диаграмм деформирования материалов.

На стадии 1 а (рис. 1 а) деформации фибрового волокна растянутой зоны достигают предельных значений ($\varepsilon_{bt} = \varepsilon_{bt}^*$) и в системе (1) вместо неизвестной ε_{bt} принимаем известное значение величины предельных относительных деформаций бетона на растяжение ε_{bt}^* , а вместо M запишем $M_{кр}$ – момент трещинообразования железобетонного изгибаемого элемента. В результате получена аналогичная (1) система, включающая четыре неизвестных – ε_b , ε_s , x и $M_{кр}$, позволяющих описать НДС железобетонного изгибаемого элемента при достижении предельных деформаций растяжения в бетоне и определить момент трещинообразования.

Стадия 2 НДС (рис. 1 б) поперечного сечения характеризуется следующими параметрами – $\varepsilon_b, \varepsilon_s, x$ и h_{cr} (высота неразрушенной части поперечного сечения). Относительные деформации растянутого бетона над трещиной находятся в предельном состоянии, то есть $\varepsilon_{bt} = \varepsilon_{bt}^*$.

В итоге получена система уравнений (2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon_b}{-x} = \frac{\varepsilon_s}{h_0 - x} \\ \frac{\varepsilon_b}{-x} = \frac{\varepsilon_{bt}^*}{h_{cr} - x} \\ -b \frac{x}{\varepsilon_b} \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}^*} \sigma_b(\varepsilon) d\varepsilon + \sum_i \sigma_{si}(\varepsilon_s) A_{si} = 0 \\ b \left(\frac{x}{\varepsilon_b}\right)^2 \int_{\varepsilon_b}^{\varepsilon_{bt}^*} \sigma_b(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon + \sum_i \sigma_{si}(\varepsilon_s) A_{si} (h_{0i} - x) = M \end{array} \right. \quad (2)$$

В предельном состоянии стадии 2 (стадия 2 а) исчерпание несущей способности железобетонного изгибаемого элемента по нормальному сечению происходит при достижении предельных деформаций в растянутой арматуре ($\varepsilon_s = \varepsilon_s^*$) и/или при достижении фибровыми волокнами сжатой зоны бетона предельных деформаций ($\varepsilon_b = \varepsilon_b^*$). В первом случае неизвестными параметрами являются ε_b, h_{cr}, x и M_u , а во втором – ε_s, h_{cr}, x и M_u . Минимальный предельный момент M_u является несущей способностью железобетонного изгибаемого элемента.

Полученные системы уравнений (1) и (2), вместе с системами для предельных состояний стадий 1 а и 2 а, позволяют:

– описать НДС поперечного сечения железобетонного изгибаемого элемента – системы уравнений (1) и (2) на любой стадии НДС и при любом значении внутреннего усилия M ;

– определить предельный момент трещинообразования M_{cr} – система уравнений (1) для стадии 1 а;

– определить предельные моменты при расчёте по несущей способности – система уравнений (2) для стадии 2 а.

На основании расчётных формул СП 63.13330, но с использованием найденных значений напряжений и деформаций в бетоне и арматуре, а также высоты сжатой зоны поперечного сечения x определяются:

– ширина раскрытия трещин – из системы уравнений (2) вычисляются значения относительных деформаций в растянутой арматуре ε_s с последующим нахождением напряжений σ_s ;

– прогибы – значения ε_b и x , участвующие в определении кривизны определяются на основании систем уравнений (1) и (2).

Процесс вычисления по системам (1) и (2) возможен на основании практически любых диаграмм деформирования $\sigma(\varepsilon)$, которые являются интегрируемыми: кусочно-линейные функции, сплайн-функции, полиномы, линейные функции и т. д.

Как показали исследования [1–13] учёных и инженеров, принятие той или иной диаграммы деформирования бетона оказывает влияние на точность результата расчёта железобетонных конструкций по нормальным сечениям (в первую очередь, в определении напряжений и деформаций бетона и арматуры, и в меньшей степени – в определении несущей способности), что является одним из факторов, объясняющим желание найти наиболее точную математическую зависимость описывающую процесс деформирования бетона в процессе нагружения. Однако, учитывая особенности присутствующие в диаграмме деформирования, – наличие нескольких участков с качественно разными физическими процессами деформирования (зоны упругих деформаций и пластических деформаций, обусловленные микро- и макротрещинообразованием), изменение (уменьшение) модуля упругости бетона по мере увеличения нагрузки, качественно схожий характер деформирования на сжатие и растяжение, необходимость обеспечения неразрывности функции, наличие/отсутствие ниспадающей ветви в зависимости от механизма загрузки, энергии, затрачиваемой на разрушение единицы объёма бетона при сжатии/растяжении и т.д., – задача математического описания диаграммы деформирования бетона видится непростой.

Достаточно ёмко возможность учёта различных факторов в одной аналитической функции охарактеризовал Н.И. Безухов, который утверждает, что «попытки автора найти подходящие уравнения для таких кривых привели бы к практической безнадёжности охватить единой непрерывной функцией всё многообразие поведения даже одного только материала в различных его марках» [14]. И действительно, предложенные в настоящее время аппроксимирующие функции сводятся в основном к простому повторению контура

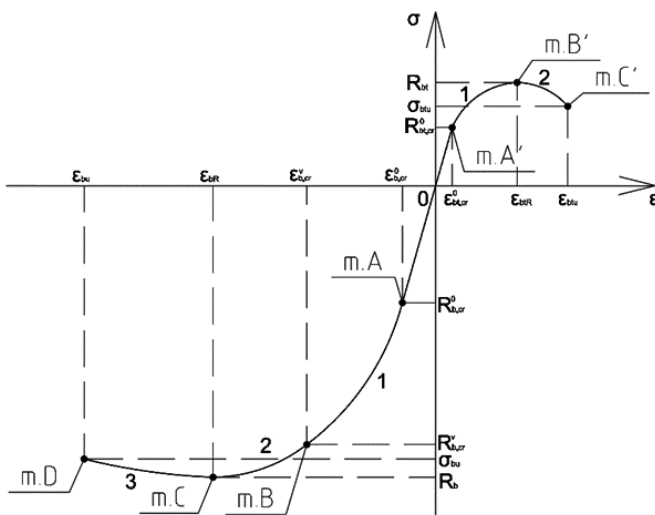


Рис. 2. Диаграмма деформирования бетона (m. D ($\varepsilon_{bt}^v; \sigma_{bt}^v$) – предельные деформации на сжатие; m. C ($\varepsilon_{bt}^v; R_{bt}^v$) – предельные напряжения на сжатие; m. B ($\varepsilon_{bt,cr}^v; R_{bt,cr}^v$) – верхняя граница макротрещинообразования; m. A ($\varepsilon_{bt,cr}^0; R_{bt,cr}^0$) – нижняя граница макротрещинообразования; m. A' ($\varepsilon_{bt,cr}^0; R_{bt,cr}^0$) – точка окончания упругих деформаций; m. B' ($\varepsilon_{bt,R}^v; R_{bt}^v$) – точка предельных напряжений на растяжение; m. C' ($\varepsilon_{bt,u}^v; \sigma_{bt,u}^v$) – точка предельных деформаций на растяжение

реальной диаграммы деформирования, не привязываясь к её физико-механическому смыслу. Как отметил О.Я. Берг, «недостатком этих кривых является то обстоятельство, что физическая сущность явления и причинность тех или иных особенностей кривой полностью выпадают» [13].

Ранее в работе [16] автором статьи совместно с проф. В.М. Митасовым предложена аппроксимирующая функция – сплайн-функция, основанная на соблюдении принципа минимума энергии деформирования и позволяющая из-за своей универсальности единообразно описать нелинейные кривые деформирования бетонов разных видов, классов и марок (рис. 2).

$$\begin{cases} \sigma_{b3}(\varepsilon) = R_b + m_1(\varepsilon - \varepsilon_{bR})^2, & \varepsilon_{bR} < \varepsilon \leq \varepsilon_{bu} \\ \sigma_{b2}(\varepsilon) = R_{b,cr}^0 + m_2(\varepsilon - \varepsilon_{b,cr}^0)^2 + m_3(\varepsilon - \varepsilon_{b,cr}^0)^3 + m_4(\varepsilon - \varepsilon_{b,cr}^0)^4, & \varepsilon_{b,cr}^0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{bR} \\ \sigma_{b1}(\varepsilon) = R_{b,cr}^0 + E_b(\varepsilon - \varepsilon_{b,cr}^0) + m_5(\varepsilon - \varepsilon_{b,cr}^0)^2 + m_6(\varepsilon - \varepsilon_{b,cr}^0)^3, & \varepsilon_{b,cr}^0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{b,cr}^0 \\ \sigma_{b0}(\varepsilon) = E_{b0}\varepsilon, & \varepsilon_{b,cr}^0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{bt,cr}^0 \\ \sigma_{bt1}(\varepsilon) = R_{bt,cr}^0 + m_7(\varepsilon - \varepsilon_{bt,cr}^0)^2 + m_8(\varepsilon - \varepsilon_{bt,cr}^0)^3, & \varepsilon_{bt,cr}^0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{bt,R} \\ \sigma_{bt2}(\varepsilon) = R_{bt} + m_9(\varepsilon - \varepsilon_{bt,R}) + m_{10}(\varepsilon - \varepsilon_{bt,R})^2, & \varepsilon_{bt,R} < \varepsilon \leq \varepsilon_{bt,u} \end{cases} \quad (1)$$

где $\sigma_{b0}(\varepsilon)$ – аппроксимирующая линейная функция на начальном линейном участке диаграммы деформирования; $\sigma_{b1}(\varepsilon)$, $\sigma_{b2}(\varepsilon)$, $\sigma_{b3}(\varepsilon)$, $\sigma_{bt1}(\varepsilon)$ и $\sigma_{bt2}(\varepsilon)$ – отдельные аппроксимирующие функции на каждом отдельном криволинейном участке диаграммы деформирования, образующие в целом сплайн-функцию; E_{b0} – начальный модуль упругости бетона; ε – переменная величина относительных деформаций; $\varepsilon_{b,cr}^0$, $\varepsilon_{b,cr}^v$, ε_{bR} и ε_{bu} – величины относительных деформаций, соответствующие параметрическим точкам и постоянные для конкретного вида и класса бетона; $m_1 \dots m_{10}$ – коэффициенты сплайн-функции, определяемые исходя из условия прохождения её через параметрические точки, непрерывности 1-й и 2-й производных и соответствующих граничных условий.

В качестве примера выполнен ряд сопоставительных расчётов по нормальному сечению шарнирно-опёртой изгибаемой балки, загруженной по центру сосредоточенной силой P:

1. Расчёт на основании нелинейной деформационной модели, представленной в п.п. 8.1.20 – 8.1.30 СП 63.13330.2018 с разделением поперечного сечения на условные полосы высотой 10 мм, 20 мм и 60 мм.

2. Расчёт на основании предлагаемой нелинейной деформационной модели с применением диаграмм деформирования:

- а) кусочно-линейной функции, предложенной в СП 63.13330.2018 и представленной в виде:
 - диапазонов линейных участков,
 - модульного выражения;
- б) сплайн-функции, приведённой в настоящей статье;
- в) степенной функции, предложенной в работе [17];
- г) полинома, предложенного в работе [18].

Пример

Исходные данные: пролёт балки $l = 4,0$ м, ширина сечения $b = 200$ мм, высота сечения $h = 300$ мм, бетон класса В25, рабочая

высота сечения $h_0 = 270$ мм, продольная арматура $2\text{Ø}12\text{A}500$ ($A_s = 2,26 \text{ см}^2$), $P = 25 \text{ кН}$ ($M = 4P/l = 25 \text{ кН*м}$).

Диаграммы деформирования материалов по СП 63.13330: бетон – для сжатого бетона ($R_b = -18,5 \text{ МПа}$, $E_b = 30000 \text{ МПа}$, $\sigma_{b1} = 0,6R_b = -11,1 \text{ МПа}$, $\varepsilon_{b1} = \sigma_{b1}/E_b = -0,00037$, $\sigma_{b0} = \sigma_{b2} = R_b$, $\varepsilon_{b0} = -0,002$, $\varepsilon_{b2} = -0,0035$) и для растянутого ($R_{bt} = 1,55 \text{ МПа}$, $E_b = 30000 \text{ МПа}$, $\sigma_{bt1} = 0,6R_{bt} = 0,93 \text{ МПа}$, $\varepsilon_{bt1} = \sigma_{bt1}/E_b = 0,00031$, $\sigma_{bt0} = \sigma_{bt2} = R_{bt}$, $\varepsilon_{bt0} = 0,0001$, $\varepsilon_{bt2} = 0,00015$), что приведёт к виду:

$$\sigma_b(\varepsilon) = \begin{cases} -18,5, & -0,0035 \leq \varepsilon < -0,002 \\ -18,5 + \frac{7400}{1,63}(\varepsilon + 0,002), & -0,002 \leq \varepsilon < -0,00037, \\ 30000\varepsilon, & -0,00037 \leq \varepsilon \leq 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{bt}(\varepsilon) = \begin{cases} 30000\varepsilon, & 0 < \varepsilon \leq 0,00031 \\ 0,93 + \frac{6200}{0,69}(\varepsilon - 0,00031), & 0,00037 < \varepsilon \leq 0,0001, \\ 1,55, & 0,0001 < \varepsilon \leq 0,00015 \end{cases}$$

или альтернативная запись в виде модульной функции:

$$\sigma_b(\varepsilon) = 15000\varepsilon - 9,25 + 12730 * |\varepsilon + 0,00037| + 2270 * |\varepsilon + 0,002|,$$

$$\sigma_{bt}(\varepsilon) = 15000\varepsilon + 0,775 - 10507 * |\varepsilon - 0,00031| - 4493 * |\varepsilon - 0,0001|;$$

– арматура – двухлинейная ($R_s = 500 \text{ МПа}$, $E_s = 200000 \text{ МПа}$, $\sigma_{s0} = \sigma_{s2} = R_s$, $\varepsilon_{s0} = \frac{R_s}{E_s} = 0,0025$, $\varepsilon_{s2} = 0,025$), что приведёт к виду:

$$\sigma_s(\varepsilon) = \begin{cases} 200000\varepsilon, & 0 < \varepsilon \leq 0,0025 \\ 500, & 0,0025 < \varepsilon \leq 0,025 \end{cases}$$

или альтернативная запись в виде модульной функции:

$$\sigma_s(\varepsilon) = 100000\varepsilon + 250 - 100000 * |\varepsilon - 0,0025|.$$

В качестве предельной прочности для арматуры приняты относительные деформации, соответствующие достижению пределу текучести арматуры, то есть $\varepsilon_s^* = 0,0025$.

Аналитическая запись диаграммы деформирования бетона класса В25 на основе сплайн-функций примет вид (предельные параметры на основании данных [10] и СП 63.13330.2018):

$$\begin{cases} \sigma_{b3}(\varepsilon) = -18,5 + 19,13 * 10^4(\varepsilon + 0,00117)^2, & -0,00428 \leq \varepsilon < -0,00037 \\ \sigma_{b2}(\varepsilon) = -12,3 + 1,99 * 10^4(\varepsilon + 0,00048) + 1,88 * 10^7(\varepsilon + 0,00048)^2 + 4,22 * 10^9(\varepsilon + 0,00048)^3, & -0,00037 \leq \varepsilon < -0,00015 \\ \sigma_{b1}(\varepsilon) = -5,7 + 2,75 * 10^4(\varepsilon + 0,000207) + 8,73 * 10^6(\varepsilon + 0,000207)^2 - 1,24 * 10^{10}(\varepsilon + 0,000207)^3, & -0,00015 \leq \varepsilon < 0 \\ \sigma_{b0}(\varepsilon) = 27500\varepsilon, & 0 \leq \varepsilon < 0,00031 \\ \sigma_{bt1}(\varepsilon) = 1,55 - 0,91 * 10^7(\varepsilon - 0,0001)^2 + 2 * 10^{12}(\varepsilon - 0,0001)^3, & 0,00031 \leq \varepsilon < 0,00037 \\ \sigma_{bt2}(\varepsilon) = 1,4 - 6,2 * 10^3(\varepsilon - 0,00015) - 6,2 * 10^7(\varepsilon - 0,00015)^2, & 0,00037 \leq \varepsilon < 0,00015 \end{cases}$$

Степенная функция для бетона кл. В25 на основе работы [17] примет вид:

$$\sigma_b(\varepsilon) = 24975\varepsilon \left(1 - \frac{1}{3,2375}\varepsilon\right)^{-1619,75},$$

$$\sigma_{bt}(\varepsilon) = 41850\varepsilon(1 - 86\varepsilon)^{116,25}.$$

Представить диаграмму деформирования бетона кл. В25 в виде полинома [18] можно в виде следующих зависимостей:

$$\sigma_b(\varepsilon) = 3 * 10^4\varepsilon + 1,93 * 10^7\varepsilon^2 + 6,35 * 10^9\varepsilon^3 + 1,09 * 10^{12}\varepsilon^4 + 7,21 * 10^{13}\varepsilon^5,$$

$$\sigma_{bt}(\varepsilon) = 3 * 10^4\varepsilon - 1,35 * 10^8\varepsilon^2 - 10^{11}\varepsilon^3.$$

Результаты расчёта:

Параметр	Расчёт по СП 63.13330.2018				Расчёт по предлагаемой методике				
	П р е д . усил.	Нелин. деформ. модель			СП 63.13330		Сплайн	[17]	[18]
		10 мм	20 мм	60 мм	Трёх.лин.	Модуль			
M_u	28,78	27,86	27,84	27,14	27,86	27,86	28,20	27,93	27,93
$M_{срс}$	6,34	8,85	8,85	8,60	8,78	8,78	8,77	10,93	8,45
$M = 25 \text{ кН*м}$									
ε_b	–	–0,000682	–0,000680	–0,000614	–0,000669	–0,000669	–0,000652	–0,000788	–0,000713
ε_s	–	0,002227	0,002228	–0,002305	0,002226	0,002226	0,002208	0,002226	0,002229
x , см	–	6,33	6,32	5,68	6,24	6,24	6,15	7,06	6,54

Для выполнения расчёта по нелинейной деформационной модели согласно СП 63.13330.2018 потребовалось 6, 7 итераций 2. Предельные относительные деформации продольной арматуры приняты равными $\varepsilon_s^* = \varepsilon_{s0} = 0,0025$, что соответствует началу площадки текучести.

По полученным результатам расчёта получены следующие данные:

- точность результата расчёта по нелинейной деформационной модели согласно СП 63.13330.2018 зависит от принимаемой проектировщиком высоты условной полосы;

- меньшая высота условной полосы обеспечивает наиболее точный результат расчёта, постепенно приближая получаемые результаты расчёта к результатам расчёта согласно предлагаемой в статье методике;

- результаты расчёта по предлагаемой методике с использованием трёхлинейной диаграммы деформирования бетона согласно СП 63.13330.2018 одинаковы вне зависимости от применения функции в виде диапазона линейных участков или модульного выражения;

- принимаемая аппроксимирующая функция диаграмм материалов влияет на результаты расчёта, что выражается в отличающихся значениях, полученных при разных диаграммах деформирования (диапазон отклонений результатов по предлагаемой методике от значений расчёта по нелинейной деформационной модели по СП 63.13330.2018 с высотой полосы 10 мм составил: M_u – до 1,2%, $M_{срс}$ – от –0,9% до 23,5%, ε_b – от –4,4% до 15,5%, ε_s – от –0,8% до 0,1%, в зависимости от принимаемой диаграммы деформирования бетона);

- значения ε_s , ε_b и x , получаемые при расчёте по нелинейной деформационной модели, в последующем могут участвовать в определении ширины раскрытия трещин и прогибах.

* * *

На основании изложенного выше сделаны следующие выводы:

² В связи с ограничением количества страниц в статье со стороны редакции издания, алгоритм вычисления не приводится. Однако читатель может легко убедиться, что данные вычисления значительны по своему объёму (учитывая количество итераций), открыв научные работы по этой тематике (например, [6; 7]), где приведены подобные расчёты.

1. Предложенная в статье методика расчёта на основе нелинейной деформационной модели позволяет оценить НДС изгибаемого железобетонного элемента на каждой стадии, а также применима для выполнения расчёта по 1-ой и 2-ой группам предельных состояний, обеспечивая единообразие подхода.

2. Предложенная методика расчёта обладает следующими преимуществами:

- отсутствие необходимости в условном разделении на отдельные участки поперечного сечения и итерационном процессе выполнения расчёта;

- позволяет непосредственно применять диаграмму деформирования материалов $\sigma(\varepsilon)$, избегая лишних преобразований;

- расчёт выполняется на основании непосредственного применения практически любых диаграмм деформирования бетона и арматуры.

Список источников

1. Карпенко, Н.И. Развитие диаграммного метода расчёта конструкций из сталефибробетона на основе методики построения диаграмм-изохрон / Н.И. Карпенко, Г.А. Моисеенко. – Текст : непосредственный // БСТ: Бюллетень строительной техники. – 2023. – № 6 (1066). – С. 20–23.

2. Определение на основе нелинейной деформационной модели и остаточных прогибов изгибаемых железобетонных элементов степени воздействия обычных средств поражения / В.И. Римшин, А.В. Шевченко, Э.Р. Кужахметова, А.Н. Выдрин. – Текст : непосредственный // БСТ: Бюллетень строительной техники. – 2024. – № 9 (1081). – С. 61–64.

3. Маилян, Д.Р. Особенности напряжённо-деформированного состояния нормальных сечений железобетонных балок с бетоном каркасной структуры в сжатой зоне / Д.Р. Маилян, Г.В. Несветаев, Н.А. Коллеганов. – Текст : электронный // Инженерный вестник Дона. – 2023. – № 7 (103). – С.

229–244. – URL: <http://www.ivdon.ru/en/magazine/archive/n7y2023/8538> (дата обращения 13.01.2025).

4. *Трещёв, А.А.* Учёт конструктивной ортотропии и нелинейной приобретаемой неоднородности при изгибе прямоугольных пластин средней толщины / А.А. Трещёв, Н.С. Ющенко. – Текст : непосредственный // Эксперт: теория и практика. – 2023. – № 2 (21). – С. 95–102.

5. *Пинус, Б.И.* Об оценке прочности изгибаемых железобетонных элементов, подвергнутых циклическим нагрузкам / Б.И. Пинус, И.Г. Корнеева. – Текст : непосредственный // Градостроительство и архитектура. – 2023. – Т. 13, № 3 (52). – С. 23–28.

6. *Опбул, Э.К.* Нелинейно-итерационный расчёт прочности сталежелезобетонных элементов с использованием опытных диаграмм деформирования материалов / Э.К. Опбул, Д.А. Дмитриев, А.А. Ведерникова. – Текст : непосредственный // Вестник гражданских инженеров. – 2017. – № 1 (60). – С. 77–91.

7. *Морозов, В.И.* Расчёт изгибаемых сталежелезобетонных элементов по нелинейной деформационной модели с использованием опытных диаграмм деформирования сталефибробетона / В.И. Морозов, Э.К. Опбул. – Текст : непосредственный // Вестник гражданских инженеров. – 2016. – № 5 (58). – С. 51–55.

8. *Король, Е.А.* Деформационная модель для расчёта трёхслойных железобетонных элементов / Е.А. Король. – Текст : непосредственный // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2004. – № 5 (545). – С. 11–17.

9. *Мурашёв, В.И.* Трещиностойкость, жёсткость и прочность железобетона / В.И. Мурашёв. – Москва : Издательство Министерства строительства предприятий машиностроения, 1950. – 268 с. – Текст : непосредственный.

10. *Митасов, В.М.* Основные положения теории сопротивления железобетона (энергетический вариант) / В.М. Митасов. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2010. – 168 с. – Текст : непосредственный.

11. *Бондаренко, В.М.* Расчётные модели силового сопротивления железобетона / В.М. Бондаренко, В.И. Колчунов. – Москва : АСВ, 2004. – 472 с. – Текст : непосредственный.

12. Закономерности связи напряжений и деформаций в бетоне / А.А. Варламов, Е.А. Шишлонов, Е.Н. Ткач [и др.]. – Текст : непосредственный // Academy. – 2016. – № 2 (5). – С. 7–16.

13. *Колмогоров, А.Г.* Расчёт железобетонных конструкций по российским и зарубежным нормам / А.Г. Колмогоров, В.С. Плевков. – Томск : Печатная мануфактура, 2009. – 496 с. – Текст : непосредственный.

14. *Безухов, Н.И.* Основы теории сооружений, материал которых не следует закону Гука / Н.И. Безухов. – Текст : непосредственный // Сборник трудов МАДИ. – 1936. – № 4. – С. 9–16.

15. *Берг, О.Я.* Физические основы теории прочности бетона и железобетона / О.Я. Берг. – Москва : Госстройиздат, 1962. – 96 с. – Текст : непосредственный

16. *Митасов, В.М.* О единстве подхода представления диаграмм деформирования разновозрастных и разнопрочных бетонов в сборно-монолитных конструкциях / В.М. Митасов, А.А. Коянкин // Вестник Сибирского государственного университета путей сообщения. – 2020. – № 4 (55). – С. 80–85.

17. *Радайкин, О.В.* Сравнительный анализ различных диаграмм деформирования бетона по критерию энергозатрат на деформирование и разрушение / О.В. Радайкин. – Текст : непосредственный // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. – 2019. – № 10. – С. 29–39.

18. *Байков, В.Н.* Построение зависимости между напряжениями и деформациями сжатого бетона по системе нормируемых показателей / В.Н. Байков, С.В. Горбатов, З.А. Димитров – Текст : непосредственный // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1977. – № 6. – С. 15–18.

References

1. Karpenko N.I., Moiseenko G.A. Razvitie diagrammnogo metoda rascheta konstruksii iz stalefibrobetona na osnove metodiki postroeniya diagramm-izokhron [Development of a Diagrammatic Method for Calculating Structures Made of Steel-Fiber Concrete Based on the Method of Constructing Diagrams-Isochron]. In: *BST: Byulleten' stroitel'noi tekhniki [BST: Byulleten' Stroitel'noj Tehniki]*, 2023, no. 6 (1066), pp. 20–23. (In Russ., abstr. in Engl.)

2. Rimshin V.I., Shevchenko A.V., Kuzhakhmetova E.R., Vydrin A.N. Opredelenie na osnove nelineinoi deformatsionnoi modeli i ostatochnykh progibov izgibaemykh zhelezobetonnykh elementov stepeni vozdeistviya obychnykh sredstv porazheniya [Determination of Residual Deflections of Bent Reinforced Concrete Elements Based on a Nonlinear Deformation Model]. In: *BST: Byulleten' stroitel'noi tekhniki [BST: Byulleten' Stroitel'noj Tehniki]*, 2024, no. 9 (1081), pp. 61–64. (In Russ., abstr. in Engl.)

3. Mailyan D.R., Nesvetaev G.V., Kolleganov N.A. Osobennosti napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya normal'nykh sechenii zhelezobetonnykh balok s betonom karkasnoi struktury v szhatoi zone [Features of the Stress-Strain State of Normal Sections of Reinforced Concrete Beams with Concrete of Frame Structure in a Compressed Zone]. In: *Inzhenernyi vestnik Dona [Engineering Journal of Don]*, 2023, no. 7 (103), pp. 229–244. URL: <http://www.ivdon.ru/en/magazine/archive/n7y2023/8538> (Accessed 01/13/2025). (In Russ., abstr. in Engl.)

4. Treshchev A.A., Yushchenko N.S. Uchet konstruktivnoi ortotropii i nelineinoi priobre-taemoi neodnorodnosti pri izgibe pryamougol'nykh plastin srednei tolshchiny [Consideration of Constructive Orthotropy and Nonlinear Acquired Inhomogeneity during Bending of Rectangular Plates of Medium Thickness]. In: *Ekspert: teoriya i praktika [Expert: Theory and Practice]*, 2023, no. 2 (21), pp. 95–102. (In Russ., abstr. in Engl.)

5. Pinus B.I., Korneeva I.G. Ob otsenke prochnosti izgibaemykh zhelezobetonnykh elementov, podvergnutykh tsiklicheskim nagruzheniyam [On the Assessment of the Strength of Bent Reinforced Concrete Elements Subjected to

Cyclic Loading]. In: *Gradostroitel'stvo i arkhitektura [Urban Construction and Architecture]*, 2023, Vol. 13, no. 3 (52), pp. 23–28. (In Russ., abstr. in Engl.)

6. Opubl E.K., Dmitriev D.A., Vedernikova A.A. Nelineino-iteratsionnyi raschet prochnosti stalezhelezobetonnykh elementov s ispol'zovaniem opytnykh diagramm deformirovaniya materialov [Nonlinear-Iterative Calculation of Durability of Steel Fiber Reinforced Concrete Elements Using Experimental Charts of Material Deformations]. In: *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov [Bulletin of Civil Engineers]*, 2017, no. 1 (60), pp. 77–91. (In Russ., abstr. in Engl.)

7. Morozov V.I., Opubl E.K. Raschet izgibaemykh stalezhelezobetonnykh elementov po nelineinoi deformatsionnoi modeli s ispol'zovaniem opytnykh diagramm deformirovaniya stalefibrobetona [Calculation of Steel-Fiber-Reinforced Concrete Members Subjected to Bending according to the Nonlinear Deformation Model Using Test Deformation Diagrams Of Steel-Fiber-Reinforced Concrete]. In: *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov [Bulletin of Civil Engineers]*, 2016, no. 5 (58), pp. 51–55. (In Russ., abstr. in Engl.)

8. Korol' E.A. Deformatsionnaya model' dlya rascheta trekhslonnykh zhelezobetonnykh elementov [Deformation Model for calculating Three-Layer Reinforced Concrete Elements]. In: *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Stroitel'stvo [News of Higher Educational Institutions. Construction]*, 2004, no. 5 (545), pp. 11–17. (In Russ.)

9. Murashev V.I. Treshchinostoikost', zhestkost' i prochnost' zhelezobetona [Crack Resistance, Rigidity and Strength of Reinforced Concrete]. Moscow, Izdatel'stvo Ministerstva stroitel'stva predpriyatii mashinostroeniya [Publishing House of the Ministry of Construction of Machine-Building Enterprises], 1950, 268 p. (In Russ.)

10. Mitasov V.M. Osnovnye polozheniya teorii soprotivleniya zhelezobetona (energeticheskii variant) [Basic Provisions of the Theory of Reinforced Concrete Resistance (Energy Version)]. Novosibirsk, NGASU (Sibstrin) Publ., 2010, 168 p. (In Russ.)

11. Bondarenko V.M., Kolchunov V.I. Raschetnye modeli silovogo soprotivleniya zhelezobetona [Calculation Models of Reinforced Concrete Force Resistance]. Moscow, ASV Publ., 2004, 472 p. (In Russ.)

12. Varlamov A.A., Shishlonov E.A., Tkach E.N., Shumilin M.S., Goncharov D.V. Zakonomernosti svyazi napryazhenii i

deformatsii v betone [Regularities of the relationship between stresses and strains in concrete]. In: *Academy*, 2016, no. 2 (5), pp. 7–16. (In Russ.)

13. Kolmogorov A.G., Plevkov V.S. Raschet zhelezobetonnykh konstruksii po rossiiskim i zarubezhnym normam [Calculation of Reinforced Concrete Structures according to Russian and Foreign Standards]. Tomsk, Pechatnaya manufaktura Publ., 2009, 496 p. (In Russ.)

14. Bezukhov N.I. Osnovy teorii sooruzhenii, material kotorykh ne sleduet zakonu Guka [Fundamentals of the Theory of Structures, the Material of Which Does Not Follow Hooke's Law]. In: *Sbornik trudov MADI [Collection of Works of MADI]*, 1936, no. 4, pp. 9–16. (In Russ.)

15. Berg O.Ya. Fizicheskie osnovy teorii prochnosti betona i zhelezobetona [Physical Foundations of the Theory of Strength of Concrete and Reinforced Concrete]. Moscow, Gosstroizdat Publ., 1962, 96 p. (In Russ.)

16. Mitasov V.M., Koyankin A.A. O edinstve podkhoda predstavleniya diagramm deformirovaniya raznovozrastnykh i raznoprochnykh betonov v sborno-monolitnykh konstruksiyakh [On the Unity of the Approach to Representation of Deformation Diagrams for Concretes of Different Ages and Different Strengths in Precast-Monolithic Structures]. In: *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo universiteta putei soobshcheniya [The Siberian Transport University Bulletin]*, 2020, no. 4 (55), pp. 80–85. (In Russ., abstr. in Engl.)

17. Radaikin O.V. Sravnitel'nyi analiz razlichnykh diagramm deformirovaniya betona po kriteriyu energozatrat na deformirovanie i razrushenie [Comparative Analysis of Various Diagrams of Concrete Deformation according to the Criterion of Energy Consumption for Deformation and Destruction]. In: *Vestnik Belgorodskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta im. V.G. Shukhova [Bulletin of BSTU Named after V.G. Shukhov]*, 2019, no. 10, pp. 29–39. (In Russ., abstr. in Engl.)

18. Baikov V.N., Gorbato S.V., Dimitrov Z.A. Postroenie zavisimosti mezhdu napryazheniyami i deformatsiyami szhatogo betona po sisteme normiruemykh pokazatelei [Construction of the relationship between stresses and deformations of compressed concrete using a system of standardized indicators]. In: *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura [Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Stroitel'stvo and Architecture]*, 1977, no. 6, pp. 15–18. (In Russ.)