Academia. Архитектура и строительство, № 3, стр. 128–130.
Academia. Architecture and Construction, no. 3, pp. 128–130.

Исследования и теория
Научная статья
УДК 69.04
DOI: 10.22337/2077-9038-2025-3-128-130

Аналитический анализ балки Бернулли-Эйлера на вязкоупругом основании под воздействием подвижной нагрузки

Мондрус Владимир Львович (Москва). Доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РААСН. Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26. НИУ МГСУ). Эл. почта: MondrusVL@mgsu.ru

Гарбер Евгения Олеговна (Москва). Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26. НИУ МГСУ). Эл. почта: GarberEO@mgsu.ru

Аннотация. В статье получено точное аналитическое решение задачи об упругой балке Бернулли-Эйлера на вязкоупругом основании Кельвина-Фойгта, описанном моделью Фусса-Винклера с дробной производной Грюнвальда-Летникова под действием подвижной постоянной и гармонической нагрузки.

Ключевые слова: численные методы, балка Бернулли-Эйлера, дробное исчисление, демпфирование, вязкоупругое основание, подвижная нагрузка

Финансирование. Исследование выполнено в рамках проекта РНФ № 25-11-00140.

Для цитирования. Мондрус В.Л., Гарбер Е.О. Аналитический анализ балки Бернулли-Эйлера на вязкоупругом основании под воздействием подвижной нагрузки // Academia. Архитектура и строительство. – 2025. – № 3. – С. 128–130. – DOI: 10.22337/2077-9038-2025-3-128-130.

Analytical Analysis of Euler-Bernoulli Beam on Viscoelastic Foundation under Moving Load

Mondrus Vladimir L. (Moscow). Doctor of Sciences in Technology, Professor, Corresponding Member of RAACS. The Moscow State University of Civil Engineering (26 Yaroslavskoye Highway, Moscow, 129337, Russia. MGSU). E-mail: MondrusVL@mgsu.ru

Garber Evgeniya O. (Moscow). The Moscow State University of Civil Engineering (26 Yaroslavskoye Highway, Moscow, 129337, Russia. MGSU). E-mail: GarberEO@mgsu.ru

Abstract. The paper presents an exact analytical solution to the problem of a Bernoulli-Euler elastic beam on a Kelvin-Voigt viscoelastic foundation described by the Fuss-Winkler model with a fractional Grunwald-Letnikov derivative under the action of a moving constant and harmonic load.

Keywords: numerical calculation methods, Euler-Bernoulli beam, fractional calculus, damping, viscoelastic foundation, moving load

Funding. The study was carried out within the framework of the RSF project No. 25-11-00140.

For citation. Mondrus V.L., Garber E.O. Analytical Analysis of Euler-Bernoulli Beam on Viscoelastic Foundation under Moving Load. In: *Academia. Architecture and Construction*, 2025, no. 3, pp. 128–130, doi: 10.22337/2077-9038-2025-3-128-130.

В последнее время транспортные средства развиваются в сторону стремительного увеличения скорости. Вследствие этого развития на здания и сооружения возрастает динамическая нагрузка [1].

Транспортные нагрузки являются подвижными, то есть переменными во времени и пространстве. При анализе динамического поведения конструкций под действием подвижной нагрузки ключевое значение имеет выбор модели, описывающей сопротивление среды [2; 3]. В качестве объекта исследования была выбрана упругая балка Эйлера-Бернулли на вязкоупругом основании, описываемом моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной Грюнвальда-Летникова:

Дробная производная Грюнвальда-Летникова является одним из ключевых инструментов для численного моделирования динамики сооружений с памятью и наследственными свойствами. Она широко применяется для:

– анализа демпфирования конструкций,
– моделирования вязкоупругих материалов,
– решения задач сейсмостойкости и виброзащиты.

Внедрение в практику строительства новых материалов, технологий и конструктивных решений, усложнение конструктивных систем зданий и сооружений приводят к необходимости использования нелинейных методов расчёта. Реальные материалы не являются чисто упругими, их свойства зависят от памяти системы и описываются вязкоупругими моделями на основе операторов дробного порядка, поскольку изменение порядка от нуля до единицы позволяет управлять вязкоупругими свойствами системы от чисто упругого до вязкого состояния соответственно.

Рассмотрим балку Эйлера-Бернулли под действием подвижной нагрузки (рис. 1), уравнение изгибных колебаний которой имеет вид [4–6]:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F_1 = P(t)\delta(x - x_0), \qquad (1)$$

где $w(x,t)$ – динамический прогиб балки; F – площадь поперечного сечения; ρ – масса единицы объёма; $P(t)$ – внешняя подвижная нагрузка; EI – жёсткость балки при изгибе; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; $F_1 = \tilde{\lambda} w$ – реакция вязкоупругого основания Винклера-Фусса, $\tilde{\lambda} = \lambda_0(1+\tau D)$; λ_0 – податливость; τ – время ретардации.

Начальные и граничные условия для уравнения (1):

$$\begin{aligned} &w(x,0)=0, \ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{t=0}=0; \\ &w(0,t)=0, \ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0; \\ &w(l,t)=0, \ \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{x=l}=0; \end{aligned} \qquad (2)$$

Для анализа динамического поведения конструкций применяются различные аналитические и численные методы, такие как метод конечных элементов [7–9], метод временных масштабов [10] и другие. В данной работе рассмотрено решение уравнения (1) с учётом граничных и начальных условий (2) методом преобразования Лапласа с использованием дробного оператора Грюнвальда-Летникова.

Для случая нагрузки $P=A=const$ представим решение уравнения (1) в виде произведения:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{L}\right)^4 T_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\ddot{T}_n(t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\sin(\pi n v_0 t)\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \qquad (4)$$

$$\lambda_0 D_{0+}^{\alpha} w = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_0\tau^{\alpha} D_{0+}^{\alpha}\mathrm{T_n(t)}\sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right)$$

Тогда с помощью вспомогательных преобразований (4) уравнение в пространстве изображений при решении методом преобразования Лапласа будет иметь вид:

$$s^2 T(s) + \frac{\lambda_0\tau^{\alpha}}{\rho F}s^{\alpha}T(s) + \frac{EI\pi^4 n^4}{L^4\rho F}T(s) = \\ = \frac{2A}{\rho F}\sin(\pi n v_0 t) \qquad (5)$$

С помощью функций Миттага-Леффлера выполняется переход из пространства изображений в пространство оригиналов:

$$T_n(t) \\ = \frac{2A}{\rho F}\sum_k\left(-\frac{EI\pi^4 n^4}{L^4\rho F}\right)^k\sum_r\binom{r+k}{r}\left(-\frac{\lambda_0\tau^{\alpha}}{\rho F}\right)^r t^{2k+1+(2-\alpha)r}E_{-2,\,2k+2+(2-\alpha)r}(-\sqrt{2}\pi^{-2}v_0^{-2}\,t^2),$$

где $E_{\gamma,\beta} = \sum_k\frac{z^k}{\Gamma(k\gamma+\beta)}, \gamma > 0, \beta > 0, z \in \mathbb{C}$ – функция Миттага-Леффлера.

В случае гармонической нагрузки $P=A\sin\omega_0 t$ уравнение (1) в пространстве изображений примет вид:

$$s^2 T(s) + \frac{\lambda_0\tau^{\alpha}}{\rho F}s^{\gamma}T(s) + \frac{EI\pi^4 n^4}{L^4\rho F}T(s) = \frac{2A}{\rho F}\sin\omega_0 t\,\sin(\pi n v_0 t) \qquad (7)$$

Переход к пространству оригиналов и решение уравнения (7) методом преобразования Лапласа:

$$T_n(t) = \\ \frac{2\omega_0 A}{\rho F}\sum_k\left(-\frac{EI\pi^4 n^4}{L^4\rho F}\right)^k\sum_r\binom{r+k}{r}\left(-\frac{\lambda_0\tau^{\alpha}}{\rho F}\right)^r t^{2k+1+(2-\alpha)r}(E_{-2,\,2k+2+(2-\gamma)r}(-(\omega_0^2 + \\ \pi n v_0)^2\,t) - E_{-2,\,2k+2+(2-\alpha)r}(-(\omega_0^2 - \pi n v_0)^2\mathrm{t}) \qquad (8)$$

* * *

Применение дробных производных открыло новые возможности для анализа динамики конструкций, сочетая точность описания диссипативных процессов с вычислительной эффек-

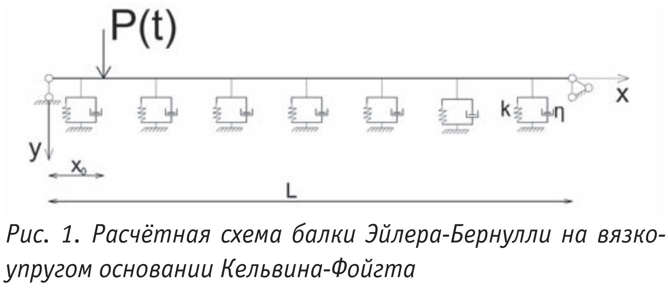

Рис. 1. Расчётная схема балки Эйлера-Бернулли на вязкоупругом основании Кельвина-Фойгта

тивностью. Получено точное аналитическое решение для случая упругой балки Эйлера-Бернулли на вязкоупругом основании Фусса-Винклера, описываемое моделью Кельвина-Фойгта с использованием дробной производной Грюнвальда-Летникова под действием постоянной и гармонической подвижной нагрузки.

Список источников

1. *Frýba L.* Vibration of Solids and Structures under Moving Loads / L. Frýba. – Dordrecht : Springer, 1973. – 484 p. – Текст : непосредственный.

2. *Rossikhin. Yu.A.* Applications of Fractional Calculus to Dynamic Problems of Line-Ar and Nonlinear Hereditary Mechanics of Solids / Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. – DOI: 10.1115/1.3101682. – Текст : электронный // Applied Mechanics Reviews. – 1997. – Vol. 50, № 1. – P. 15–67. – URL: https://clck.ru/3Nf3LP (дата обращения 15.08.2025).

3. *Rossikhin, Yu.A.* Analysis of Dynamic Behaviour of Viscoelastic Rods Whose Rheological Models Contain Fractional Derivatives of Two Different Orders / Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. – Текст : электронный // The Shock and Vibration Digest. – 2004. – Vol. 36, № 3–26. – URL: https://clck.ru/3Nf7r6 (дата обращения 15.08.2025).

4. *Шитикова, М.В.* Применение дробного исчисления при моделировании динамического поведения конструкций под воздействием подвижных нагрузок : обзор / М.В. Шитикова, А.И. Круссер. – Текст : непосредственный // Известия вузов. Радиофизика. – 2024. – Т.67, № 5. – С. 439–456.

5. *Ждан, Т.И.* Действия подвижных нагрузок на балки Бернулли–Эйлера и Тимошенко / Т.И. Ждан. – Текст : непосредственный // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. – 2019. – № 5. – С. 61–65; Moscow University Mechanics Bulletin,

6. A Numerical Integration Approach for Fractional-Order Viscoelastic Analysis of Hereditary-Aging Structures // Beltempo A., Bonelli A., Bursi O.S., Zingales M. – Текст : электронный // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2019. – Vol. 121, Iss. 6. – P. 1120–1146. – URL: https://clck.ru/3Nf4MJ (дата обращения 15.08.2025).

7. *Круссер, А.И.* Численный анализ нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки на основе моделей с дробными производными / А.И. Круссер, М.В. Шитикова. – Текст : непосредственный // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2022. – Т. 26, № 4. – С. 694–714. – URL: https://clck.ru/3NfnWF (дата обращения 15.08.2025).

8. *Власов, В.З.* Балки, плиты, оболочки на упругом основании / Власов В.З., Леонтьев Н.Н. – Текст : непосредственный. – Москва : Физматгиз, 1960. – 491.

9. Fractional Calculus: Models and Numerical Methods / D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo. ; 2nd ed. – Singapore : World Scientific, 2017. – 400 p. – Текст : непосредственный.

10. Gorenflo, R. Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order / R. Gorenflo, F. Mainardi // Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. – Wien : Springer, 1997. – P. 223–276. – Текст : непосредственный.

References

1. Frýba L., Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. Dordrecht, Springer, 1973, 484 p. (In Engl.)

2. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Applications of Fractional Calculus to Dynamic Problems of Line-Ar and Nonlinear Hereditary Mechanics of Solids. In: *Applied Mechanics Reviews,* 1997, Vol. 50, no. 1, pp. 15–67 (In Engl.)

3. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Analysis of Dynamic Behaviour of Viscoelastic Rods Whose Rheological Models Contain Fractional Derivatives of Two Different Orders. In: *The Shock and Vibration Digest,* 2004, no. 36, pp. 3–26. URL: https://clck.ru/3Nf7r6 (Accessed 08/15/2025). (In Engl.)

4. Shitikova M.V., Krusser A.I. Primenenie drobnogo ischisleniya pri modelirovanii dinamicheskogo povedeniya konstruktsii pod vozdeistviem podvizhnykh nagruzok [Application Of Fractional Calculus For Modeling The Dynamic Behavior Of Structures Under Moving Loads], A Review. In: *Izvestiya vuzov. Radiofizika,* 2024Vol. 67, no. 5, pp. 439–456. (In Russ., abstr.in Engl.)

5. Zhdan T.I. Deistviya podvizhnykh nagruzok na balki Bernulli-Eilera i Timoshenko [Action of Moving Loads on the Bernoulli-Euler and Timoshenko Beams]. In: *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika, mekhanika* [*Moscow University Mechanics Bulletin*], 2019, Vol. 74, no. 5, pp. 123–127 (In Russ., in Engl.)

6. Beltempo A., Bonelli A., Bursi O.S., Zingales M. A Numerical Integration Approach for Fractional-Order Viscoelastic Analysis of Hereditary-Aging Structures. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2019, Vol. 121, Iss. 6, pp. 1120–1146. URL: https://clck.ru/3Nf4MJ (Accessed 08/15/2025). (In Engl.)

7. Krusser A.I., Shitikova M.V. Chislennyi analiz nelineinykh kolebanii plastiny na vyaz-kouprugom osnovanii pod deistviem podvizhnoi ostsilliruyushchei nagruzki na osnove modelei s drobnymi proizvodnymi [Numerical Analysis of Nonlinear Vibrations of a Plate on a Viscoelastic Foundation under the Action of a Moving Oscillating Load Based on Models with Fractional Derivatives]. In: *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [*Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*], 2022, Vol. 26, no. 4, pp. 694–714 (In Russ., abstr.in Engl.). – URL: https://clck.ru/3NfnWF (дата обращения 15.08.2025).

8. Vlasov V.Z., Leont'ev N.N., Balki, plity, obolochki na uprugom osnovanii [Beams, Slabs, Shells on an Elastic Foundation]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960, 492 p. (In Russ.).

9. Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J.J. Fractional Calculus: Models and Numerical Methods. Singapore, World Scientific, 2017, 400 p. (In Engl.)

10. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order. In: *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Wien, Springer, 1997, pp. 223–276. (In Engl.)