

Academia. Архитектура и строительство, № 1, стр. 133–142.

Academia. Architecture and Construction, no. 1, pp. 133–142.

Исследования и теория

Научная статья

УДК 69.04

DOI: 10.22337/2077-9038-2026-1-133-142

Вынужденные колебания балки конечной длины на стохастическом упругом основании под действием стационарной случайной нагрузки

Мондрус Владимир Львович (Москва). Доктор технических наук, профессор, член-корреспондент РААСН. Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26. НИУ МГСУ). Эл. почта: MondrusVL@mgsu.ru

Попов Роман Вадимович (Москва). Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26. НИУ МГСУ). Эл. почта: popovroom720@mail.ru

Аннотация. В данной статье представлен алгоритм расчёта балок, расположенных на двухпараметрическом основании модели Власова-Пастернака, на вынужденные колебания. Внешняя вибрационная нагрузка и коэффициенты постели представляются гауссовскими стационарными случайными функциями координаты балки. Для вычисления значений математических ожиданий и стандартов прогибов в сечениях балки используется метод Бубнова-Галёркина в его обобщённом виде с последующим применением метода статистического моделирования Монте-Карло в программной среде MATLAB. По представленному алгоритму построены эпюры математических ожиданий и стандартов прогибов балки при различных законах распределения входных коэффициентов метода Монте-Карло при фиксированных значениях первых двух моментов. Показано, что использование распределений Стюдента и Лапласа вместо нормального для оценки статистических характеристик прогибов балки более целесообразно при реальном проектировании, так как позволяет учесть возможность крайне редких и заметных превышений прогибов в условиях ограниченного объёма экспериментальных данных при наличии крайне неоднородных участков грунта, а также при слабой изученности основания.

Ключевые слова: упругое стохастическое основание, модель Власова-Пастернака, коэффициент постели, случайная функция, вынужденные колебания, корреляционная функция, метод Монте-Карло

Для цитирования. Мондрус В.Л., Попов Р.В. Вынужденные колебания балки конечной длины на стохастическом упругом основании под действием стационарной случайной нагрузки // Academia. Архитектура и строительство. 2026. № 1. С. 133–142. DOI: 10.22337/2077-9038-2026-1-133-142.

Forced Vibrations of a Finite-Length Beam on a Stochastic Elastic Foundation under Stationary Random Loading

Mondrus Vladimir L. (Moscow). Doctor of Sciences in Technology, Professor, Corresponding Member of RAACS. The Moscow State University of Civil Engineering (26 Yaroslavskoye Highway, Moscow, 129337, Russia. MGSU). E-mail: MondrusVL@mgsu.ru

Popov Roman V. (Moscow). The Moscow State University of Civil Engineering (26 Yaroslavskoye Highway, Moscow, 129337, Russia. MGSU). E-mail: popovroom720@mail.ru

Abstract. In this paper, an algorithm is presented for the analysis of beams resting on a two-parameter Vlasov–Pasternak foundation under forced vibrations. The external vibrational load and the foundation (subgrade reaction) coefficients are

modeled as Gaussian stationary random functions of the beam coordinate. To compute the mean values and standard deviations of deflections at the beam cross-sections, the generalized Bubnov-Galerkin method is employed, followed by Monte Carlo statistical simulation in the MATLAB environment. Based on the proposed algorithm, diagrams of the mean values and standard deviations of the beam deflections are constructed for various probability distributions of the input coefficients in the Monte Carlo method, with the first two moments kept fixed. It is shown that, for practical design, the use of Student's t and Laplace distributions instead of the normal distribution to evaluate the statistical characteristics of beam deflections is more appropriate, since it makes it possible to account for the possibility of extremely rare yet significant exceedances of deflections under conditions of limited experimental data, strongly heterogeneous soil regions, and insufficient knowledge of the foundation.

Keywords: Stochastic elastic foundation; Vlasov-Pasternak model; subgrade reaction coefficient; random function; forced vibrations; correlation function; Monte Carlo method

For citation: Mondrus V.L., Popov R.V. Forced Vibrations of a Finite-Length Beam on a Stochastic Elastic Foundation under Stationary Random Loading. In: *Academia. Architecture and Construction*, 2026, no. 1, pp. 121–130, doi: 10.22337/2077-9038-2026-1-133-142.

Введение

Проблема создания метода расчёта зданий и сооружений, работающих совместно с упругим основанием, имеет обширную историю и является одной из самых важных задач строительной механики. Это очевидно, так как почти все здания и сооружения в той или иной степени взаимодействуют с подстилающим их основанием, которое в то же время обладает крайне выраженной статистической неоднородностью. Вследствие огромного числа возводимых сооружений экономический эффект от учёта такого свойства может быть крайне значительным, поэтому именно исследование и разработка статистических подходов к описанию неоднородностей свойств основания с применением математического аппарата теории случайных процессов позволяет получить результаты, которые учитывают возможные изменения внешних воздействий и механических свойств основания, которые не могут быть получены при расчёте в детерминированной постановке.

В работе [1] рассмотрены задачи изгиба бесконечной плиты и бесконечной балки, а в [2–4] – вопросы статического расчёта железобетонной балки, расположенных на стохастическом упругом основании Власова-Пастернака. В этих работах коэффициенты податливости основания $\tilde{C}_1(x)$ и $\tilde{C}_2(x)$ рассматриваются как случайные стационарные функции координаты балки, изменяющиеся по длине случайным образом, а стохастическое дифференциальное уравнение изогнутой оси балки интегрируется методом малого параметра с последующим применением метода спектральных преобразований.

Статическая работа конструкций, расположенных на стохастическом упругом основании изучена достаточно хорошо, поэтому особого внимания заслуживает его учёт при проведении динамических расчётов. В статье [5] авторами предложен алгоритм расчёта собственных частот балок конечной длины, лежащих на стохастическом двухпараметрическом основании, методом статистического моделирования Монте-Карло. Предложенный алгоритм численного метода расчёта позволяет учесть взаимную коррелированность случайных функций коэффициен-

тов постели $\tilde{C}_1(x)$ и $\tilde{C}_2(x)$ и достаточно просто получить статистические характеристики собственных частот колебаний балки.

В данной статье разработан алгоритм динамического расчёта балки конечной длины методом статистического моделирования, расположенной на стохастическом упругом основании Власова-Пастернака с двумя коэффициентами постели, на которую действует вибрационная нагрузка, изменяющаяся по длине балки случайным образом, которая может возникнуть при движении тяжёлого грузового транспорта по магистрали, расположенной в непосредственной близости от фундамента здания или, например, при прохождении под зданием метрополитена мелкого заложения.

Методика расчёта. Рассматривается балка конечной длины, свободно лежащая на стохастическом упругом основании модели Власова-Пастернака. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний балки, на которую действует вибрационная нагрузка, изменяющаяся по координате по случайному закону, можно записать так:

$$(m_8 + m_r) \cdot \frac{\partial^2 \tilde{w}(x, t)}{\partial t^2} + EI \cdot \frac{\partial^4 \tilde{w}(x, t)}{\partial x^4} + \tilde{C}_1(x) \tilde{w}(x, t) - \tilde{C}_2(x) \frac{\partial^2 \tilde{w}(x, t)}{\partial x^2} = \tilde{p}(x) \sin \theta t, \quad (1)$$

где m_8 – погонная масса балки; m_r – погонная масса присоединенного грунта; EI – изгибная жёсткость балки; $\tilde{w}(x, t)$ – прогиб балки в сечении с координатой x в момент времени t ; $\tilde{C}_1(x)$, $\tilde{C}_2(x)$ – коэффициенты податливости основания, которые рассматриваются как нормально распределённые случайные стационарные функции координаты x с математическими ожиданиями $\langle C_1 \rangle$ и $\langle C_2 \rangle$, корреляционными функциями $K_{C1}(x - x')$ и $K_{C2}(x - x')$. Согласно исследованиям [6; 7], рекомендовано принимать корреляционную функцию коэффициента постели в виде:

$$K_{C_i}(x - x') = D_{C_i} \cdot e^{-\nu_i |x - x'|} \cos[\varphi_i(x - x')], \quad \nu_i > 0, \varphi_i > 0, \quad (2)$$

где D_{C_i} – дисперсия функции $\tilde{C}_i(x)$; ν_i – коэффициенты, характеризующий затухание корреляционных свойств по мере

удаления точек x и x' друг от друга, φ_i – коэффициенты, отражающий скрытые периодичности корреляционных свойств основания; методика определения этих коэффициентов приведена, например, в работе [8, с. 121–122, 129].

Для задания взаимно-корреляционных функций введён такой же «экспоненциально-гармонический» тип, как для корреляционных функций $K_{C_1}(x - x')$:

$$K_{C_1 C_2}(x - x') = \rho \sqrt{D_{C_1} D_{C_2}} e^{-\nu_{ij}|x-x'|} \cos[\varphi_{ij}(x - x')], \quad (3)$$

$$\nu_{ij} > 0, \varphi_{ij} > 0,$$

где $\rho = \frac{K_{C_1 C_2}(0)}{\sqrt{D_{C_1} D_{C_2}}}$ – коэффициент корреляции при нулевом сдвиге, который принимает значения в диапазоне $(0 \leq |\rho| \leq 1)$.

Основная характеристика, определяемая по данным лабораторных испытаний, показывает степень линейной взаимозависимости коэффициентов постели C_1 и C_2 . Чем ближе параметр к $|\rho|=1$, тем сильнее взаимная корреляция коэффициентов постели C_1 и C_2 стремится к линейной функциональной [9]. Общее свойство стационарных процессов в общем случае: $K_{C_1 C_2}(x - x') = K_{C_2 C_1}[-(x - x')]$ [10], однако выбранная взаимно-корреляционная функция (3) является чётной функцией, тогда $K_{C_2 C_1}(-(x - x')) = K_{C_2 C_1}(x - x')$, а значит в частном случае получаем $K_{C_1 C_2}(x - x') = K_{C_2 C_1}(x - x')$.

$\tilde{p}(x)$ рассматривается как нормально распределённая случайная стационарная функция координаты x с математическим ожиданием $M\{\tilde{p}(x)\} = \langle p \rangle = \text{const}$, корреляционной функцией

$$K_{\tilde{p}(x)} = \sigma^2 \cdot e^{-\beta|x-x'|} \cdot \cos[\gamma(x - x')],$$

где σ – дисперсия случайной функции $\tilde{p}(x)$, β и γ – параметры корреляционной функции, характеризующие затухание смешанных дисперсий в различных сечениях в зависимости от разности абсцисс. Нагрузка такого типа может возникать, например, при прохождении под зданием метрополитена мелкого заложения.

Решение дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$\tilde{w}(x, t) = \tilde{X}(x) \cdot \sin \theta t \quad (4)$$

Подставив уравнение (4) в (1), сократив обе части на $\sin \theta t$, и приведя подобные можно записать:

$$EI \cdot \tilde{X}^{IV}(x) + (\tilde{C}_1(x) - \theta^2 \cdot (m_\delta + m_r)) \cdot \tilde{X}(x) - \tilde{C}_2(x) \cdot \tilde{X}''(x) = \tilde{p}(x) \quad (5)$$

Применим процедуру обобщённого метода Бубнова-Галёркина на отрезке $[-l, l]$ для приближённого решения дифференциального уравнения. Искомую функцию $\tilde{X}(x)$ представим в виде конечной суммы:

$$\tilde{X}(x) = \sum_1^m \tilde{A}_m \psi_m(x), \quad (6)$$

где $\psi_m(x)$ – неслучайные аппроксимирующие функции, каждая из которых удовлетворяет граничным условиям; \tilde{A}_m – случайные коэффициенты.

Целью решения является определение их вероятностных характеристик.

Подставим уравнение (6) в (5), а затем, умножив получившиеся тождество на функцию $\psi_n(x)$, составим интеграл по всей длине балки:

$$\int_{-l}^l \left\{ EI \cdot \sum_1^m \tilde{A}_m \psi_m^{IV}(x) + (\tilde{C}_1(x) - \theta^2 \cdot (m_\delta + m_r)) \cdot \sum_1^m \tilde{A}_m \psi_m(x) - \tilde{C}_2(x) \cdot \sum_1^m \tilde{A}_m \psi_m''(x) \right\} \psi_n(x) dx = \int_{-l}^l \tilde{p}(x) \psi_n(x) dx \quad (7)$$

Введём обозначения:

$$\tilde{\alpha}_{m,n} = \int_{-l}^l [EI \cdot \psi_m^{IV}(x) + \tilde{C}_1(x) \psi_m(x) - \tilde{C}_2(x) \psi_m''(x)] \psi_n(x) dx \quad (8)$$

$$a_{m,n} = \int_{-l}^l \psi_m(x) \psi_n(x) dx \quad (9)$$

$$\tilde{\alpha}_{i,p} = \int_{-l}^l \tilde{p}(x) \psi_i(x) \psi_p(x) dx, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

Тогда можно записать систему алгебраических уравнений со случайными коэффициентами для определения коэффициентов \tilde{A}_m :

$$\begin{cases} \tilde{A}_1 [\tilde{\alpha}_{1,1} - a_{1,1}(m_\delta + m_r) \cdot \theta^2] + \tilde{A}_2 [\tilde{\alpha}_{1,2} - a_{1,2}(m_\delta + m_r) \cdot \theta^2] + \dots \\ \quad + \tilde{A}_m [\tilde{\alpha}_{1,m} - a_{1,m}(m_\delta + m_r) \cdot \theta^2] = \tilde{\alpha}_{1,p} \\ \dots \\ \tilde{A}_1 [\tilde{\alpha}_{m,1} - a_{m,1}(m_\delta + m_r) \cdot \theta^2] + \tilde{A}_2 [\tilde{\alpha}_{m,2} - a_{m,2}(m_\delta + m_r) \cdot \theta^2] + \dots \\ \quad + \tilde{A}_m [\tilde{\alpha}_{m,m} - a_{m,m}(m_\delta + m_r) \cdot \theta^2] = \tilde{\alpha}_{m,p} \end{cases} \quad (11)$$

Математическое ожидание коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ не будет зависеть от взаимной корреляции между $\tilde{C}_1(x)$ и $\tilde{C}_2(x)$ и выражается, согласно теории случайных функций, следующим образом:

$$M\{\tilde{\alpha}_{m,n}\} = \int_{-l}^l [EI \cdot \psi_m^{IV}(x) + (C_1) \psi_m(x) - (C_2) \psi_m''(x)] \psi_n(x) dx \quad (12)$$

Дисперсия коэффициента $\tilde{\alpha}_{m,n}$ для случая, когда $\tilde{C}_1(x)$ и $\tilde{C}_2(x)$ взаимно коррелированы, т.е. $K_{C_1 C_2}(x - x') = K_{C_2 C_1}(x - x') \neq 0$:

$$D_{\tilde{\alpha}_{m,n}} = \iint_{-l}^l [K_{C_1}(x - x') \psi_m(x) \psi_m(x') + K_{C_2}(x - x') \psi_m''(x) \psi_m''(x') - K_{C_1 C_2}(x - x') \psi_m(x) \psi_m''(x')] \psi_n(x) \psi_n(x') dx dx' \quad (13)$$

Выражение для определения математического ожидания коэффициентов $\tilde{\alpha}_{i,p}$:

$$M\{\tilde{\alpha}_{i,p}\} = p \int_{-l}^l \psi_i(x) \psi_p(x) dx \quad (14)$$

Для вычисления дисперсий коэффициентов $\tilde{\alpha}_{i,p}$:

$$D_{\tilde{\alpha}_{i,p}} = \sigma^2 \int_{-l}^l \int_{-l}^l \psi_i(x)\psi_i(x') e^{-\beta|x-x'|} \cdot \cos[\gamma(x-x')] dx dx' \quad (15)$$

Решение системы уравнений (11) методом Монте-Карло происходит следующим образом: по математическим ожиданиям и дисперсиям с помощью генератора псевдослучайных чисел в среде MATLAB моделируются N случайных коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ и грузовых членов $\tilde{\alpha}_{i,p}$. Для каждой реализации $\tilde{\alpha}_{m,n}$ и $\tilde{\alpha}_{i,p}$ решается система уравнений (11) относительно неизвестных \tilde{A}_m . Полученная таким образом последовательность N случайных чисел \tilde{A}_m подвергается статистической обработке для получения их вероятностных характеристик. Принятие гипотезы о стационарности случайных функций $\tilde{C}_1(x)$, $\tilde{C}_2(x)$ и их подчинение нормальному закону распределения, означает, что случайные числа $\tilde{\alpha}_{m,n}$ будут также нормально распределёнными, так как все применённые преобразования являются линейными. Решение системы линейных алгебраических уравнений (11) будет являться нелинейной, поэтому искомые случайные величины \tilde{A}_m уже не будут иметь симметричную гистограмму. Вследствие этого для случайных величин \tilde{A}_m необходимо получить моменты третьего и четвёртого порядков (асимметрию и эксцесс).

Однако строго гауссовская постановка задачи для моделирования случайных коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$, которая вытекает из гипотезы нормальной распределённости случайных функций $\tilde{C}_1(x)$ и $\tilde{C}_2(x)$, не учитывает всех возможных сценариев разброса свойств грунта основания. Так, реальные результаты полевых и лабораторных испытаний грунтов часто содержат редкие, но существенно отличающиеся от среднего значения реализации, которые могут быть связаны с локальными геологическими аномалиями, техногенными нарушениями грунта, а также с ограниченным объёмом исходных данных. Для возможности учёта таких особенностей в статье дополнительно рассмотрены альтернативные законы распределения случайных коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ с сохранением значений первых двух моментов – $M\{\tilde{\alpha}_{m,n}\}$ и $D_{\tilde{\alpha}_{m,n}}$.

В первом варианте для моделирования случайных коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ используется распределение Стьюдента с числом степени свободы $\nu = 5 \dots 10$, что с физической точки зрения соответствует сценарию, когда коэффициенты $\tilde{\alpha}_{m,n}$ зависящие от свойств основания, определены по ограниченному числу неоднородных измерений. Для этого $\tilde{\alpha}_{m,n}$ представляется в виде:

$$\tilde{\alpha}_{m,n} = M\{\tilde{\alpha}_{m,n}\} + s_{m,n} T_\nu, \quad s_{m,n} = \sqrt{D_{\tilde{\alpha}_{m,n}} \frac{\nu - 2}{\nu}}, \quad (16)$$

где T_ν – стандартная t -распределённая случайная величина с ν степенями свободы.

Во втором варианте коэффициенты $\tilde{\alpha}_{m,n}$ моделируются по распределению Лапласа (двойное экспоненциальное распределение), который имеет более острый центральный

пик и экспоненциально убывающие хвосты. Такой закон описывает ситуацию, когда преобладают частые небольшие вариации свойств грунта основания, но допускаются редкие скачкообразные отклонения умеренной величины. Для задания распределения Лапласа при моделировании коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ с сохранением значений первых двух моментов используются параметры:

$$\mu_{m,n} = M\{\tilde{\alpha}_{m,n}\}, \quad b_{m,n} = \sqrt{\frac{D_{\tilde{\alpha}_{m,n}}}{2}}, \quad (17)$$

После того, как вероятностные характеристики случайных величин \tilde{A}_m из решения уравнения (11) найдены, можно определить математические ожидания и дисперсии функций $\tilde{w}(x)$ и её производных (моментов и поперечных сил):

$$M\{\tilde{w}(x)\} = \sum_1^m M\{\tilde{A}_m\} \cdot \psi_m \quad (18)$$

$$D_{\tilde{w}(x)} = \sum_1^m D_{\tilde{A}_m} \cdot \psi_m^2 + 2 \sum_{i \neq j}^m D_{A_i A_j} \psi_i \psi_j \quad (19)$$

$$M\{\tilde{M}(x)\} = EI \cdot \sum_1^m M\{\tilde{A}_m\} \cdot \psi_m'' \quad (20)$$

$$D_{\tilde{M}(x)} = EI^2 \left[\sum_1^m D_{\tilde{A}_m} \cdot (\psi_m'')^2 + 2 \sum_{i \neq j}^m D_{A_i A_j} \psi_i'' \psi_j'' \right] \quad (21)$$

$$M\{\tilde{Q}(x)\} = EI \cdot \sum_1^m M\{\tilde{A}_m\} \cdot \psi_m''' \quad (21)$$

$$D_{\tilde{Q}(x)} = EI^2 \left[\sum_1^m D_{\tilde{A}_m} \cdot (\psi_m''')^2 + 2 \sum_{i \neq j}^m D_{A_i A_j} \psi_i''' \psi_j''' \right] \quad (23)$$

Результаты численных исследований

Перепишем дифференциальное уравнение (5), приняв безразмерную координату $\xi = \frac{x}{l}$:

$$\tilde{X}^{IV}(\xi) + \left[\tilde{c}_{1(\text{np})}(\xi) - \frac{(m_\delta + m_r)l^4}{EI} \cdot \tilde{\theta}^2 \right] \cdot \tilde{X}(\xi) - \tilde{c}_{2(\text{np})}(\xi) \cdot \tilde{X}''(\xi) = \tilde{p}_{\text{np}}(\xi), \quad (24)$$

где статистические характеристики для стационарных гауссовских приведённых случайных функций

$$M\{\tilde{c}_{1(\text{np})}(\xi)\} = \frac{\langle c_1 \rangle l^4}{EI}, \quad M\{\tilde{c}_{2(\text{np})}(\xi)\} = \frac{\langle c_2 \rangle l^2}{EI},$$

$$K_{\tilde{c}_{1(\text{np})}}(\xi - \xi') = \frac{D_{c_1} l^8}{(EI)^2} \cdot e^{-\nu_1 l |\xi - \xi'|} \cos[\varphi_1 l (\xi - \xi')],$$

$$K_{\tilde{c}_{2(\text{np})}}(\xi - \xi') = \frac{D_{c_2} l^4}{(EI)^2} \cdot e^{-\nu_2 l |\xi - \xi'|} \cos[\varphi_2 l (\xi - \xi')],$$

$$K_{\tilde{c}_{1(\text{np})} \tilde{c}_{2(\text{np})}}(\xi - \xi') = K_{\tilde{c}_{2(\text{np})} \tilde{c}_{1(\text{np})}}(\xi - \xi') = \sqrt{D_{c_1} D_{c_2}} \frac{l^6}{(EI)^2} e^{-\nu_{12} l |\xi - \xi'|} \cos[\varphi_{12} l (\xi - \xi')],$$

$$M\{\tilde{p}_{\text{np}}(\xi)\} = \frac{\langle p \rangle l^4}{EI}, \quad D_{\tilde{p}_{\text{np}}(\xi)} = \frac{\sigma^2 l^8}{(EI)^2} \cdot e^{-\beta l |\xi - \xi'|} \cdot \cos[\gamma l (\xi - \xi')].$$

Искомую функцию $\tilde{X}(\xi)$ будем искать в виде суммы двух аппроксимирующих функций:

$$\tilde{X}(\xi) = \tilde{A}_1 \psi_1(\xi) + \tilde{A}_2 \psi_2(\xi), \quad (25)$$

где \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 – случайные числа, а $\psi_1(\xi)$ и $\psi_2(\xi)$ – неслучайные функции, выбранные в соответствии с граничными условиями.

Так как рассматривается свободно лежащая балка конечной длины, функции $\psi_1(\xi)$ и $\psi_2(\xi)$ будут выбираться из условия равенства нулю в сечениях $\xi = \pm 1$ их вторых и третьих производных. Выберем функции таким образом, чтобы $\psi_1(\xi)$ была симметрична, а $\psi_2(\xi)$ – антисимметрична относительно начала координат:

$$\psi_1(\xi) = \xi^6 - 5\xi^4 + 15\xi^2 + 15 \quad (26)$$

$$\psi_2(\xi) = \xi^7 - 4,2\xi^5 + 7\xi^3 \quad (27)$$

Свободный член в формуле (24) для удобства следует принимать, чтобы функция $\psi_1(\xi)$ не была меньше нуля, так как это означало бы отрыв балки от основания.

Применим упрощающие обозначения:

$$\left\{ \begin{aligned} D_{ij} &= \int_{-1}^1 \psi_i^{IV}(\xi) \psi_j(\xi) d\xi \\ R_{ij} &= \int_{-1}^1 (\tilde{C}_{1(нр)}(\xi) \psi_i(\xi) - \tilde{C}_{2(нр)}(\xi) \psi_i^{II}(\xi)) \psi_j(\xi) d\xi \\ A_{ij} &= \int_{-1}^1 \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) d\xi \\ \tilde{\alpha}_{1,1} &= D_{11} + R_{11} \\ \tilde{\alpha}_{1,2} &= D_{21} + R_{21} \\ \tilde{\alpha}_{2,1} &= D_{12} + R_{12} \\ \tilde{\alpha}_{2,2} &= D_{22} + R_{22} \\ \tilde{\alpha}_{1,p} &= \int_{-1}^1 \tilde{p}_{нр}(\xi) \psi_1(\xi) d\xi \\ \tilde{\alpha}_{2,p} &= \int_{-1}^1 \tilde{p}_{нр}(\xi) \psi_2(\xi) d\xi \end{aligned} \right. \quad (28)$$

В этом случае система уравнений (11) преобразуется в систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\tilde{\alpha}_{1,1} - A_{11} \frac{(m_\delta + m_r)l^4}{EI} \cdot \bar{\theta}^2 \right] \tilde{A}_1 + \left[\tilde{\alpha}_{1,2} - A_{12} \frac{(m_\delta + m_r)l^4}{EI} \cdot \bar{\theta}^2 \right] \tilde{A}_2 &= \tilde{\alpha}_{1,p} \\ \left[\tilde{\alpha}_{2,1} - A_{12} \frac{(m_\delta + m_r)l^4}{EI} \cdot \bar{\theta}^2 \right] \tilde{A}_1 + \left[\tilde{\alpha}_{2,2} - A_{22} \frac{(m_\delta + m_r)l^4}{EI} \cdot \bar{\theta}^2 \right] \tilde{A}_2 &= \tilde{\alpha}_{2,p} \end{aligned} \right. \quad (29)$$

Значения математических ожиданий коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ имеют вид:

$$\begin{cases} M\{\tilde{\alpha}_{1,1}\} = D_{11} + M\{R_{11}\}; \\ M\{\tilde{\alpha}_{1,2}\} = D_{21} + M\{R_{21}\}; \\ M\{\tilde{\alpha}_{2,1}\} = D_{12} + M\{R_{12}\}; \\ M\{\tilde{\alpha}_{2,2}\} = D_{22} + M\{R_{22}\}, \end{cases} \quad (30)$$

где

$$M\{R_{ij}\} = \frac{(c_1)l^4}{EI} \int_{-1}^1 \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) d\xi - \frac{(c_2)l^2}{EI} \int_{-1}^1 \psi_i^{II}(\xi) \psi_j(\xi) d\xi$$

Значения дисперсии коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} D_{\tilde{\alpha}_{m,n}} &= \frac{D_{c_1}l^8}{(EI)^2} \iint_{-1-1}^{11} \psi_m(\xi) \psi_n(\xi) \psi_m(\xi') \psi_n(\xi') \\ &\quad \cdot e^{-v_1 l |\xi - \xi'|} \cos[\varphi_1 l (\xi - \xi')] d\xi d\xi' + \\ &+ \frac{D_{c_2}l^4}{(EI)^2} \iint_{-1-1}^{11} \psi_m^{II}(\xi) \psi_n(\xi) \psi_m^{II}(\xi') \psi_n(\xi') \\ &\quad \cdot e^{-v_2 l |\xi - \xi'|} \cos[\varphi_2 l (\xi - \xi')] d\xi d\xi' - \\ &- \rho \sqrt{D_{c_1} D_{c_2}} \frac{l^6}{(EI)^2} \iint_{-1-1}^{11} \psi_m(\xi) \psi_n(\xi) \psi_m^{II}(\xi') \psi_n(\xi') \\ &\quad \cdot e^{-v_{12} l |\xi - \xi'|} \cos[\varphi_{12} l (\xi - \xi')] d\xi d\xi' - \\ &- \rho \sqrt{D_{c_1} D_{c_2}} \frac{l^6}{(EI)^2} \iint_{-1-1}^{11} \psi_m^{II}(\xi) \psi_n(\xi) \psi_m(\xi') \psi_n(\xi') \\ &\quad \cdot e^{-v_{12} l |\xi - \xi'|} \cos[\varphi_{12} l (\xi - \xi')] d\xi d\xi' \end{aligned} \quad (31)$$

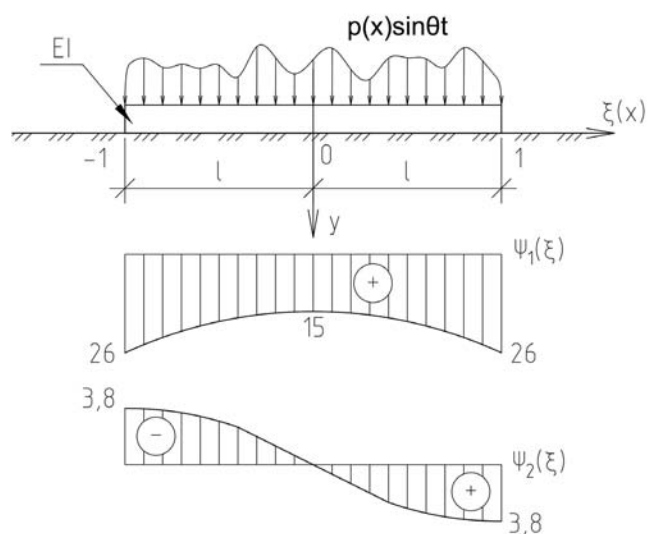


Рис. 1¹. $\psi_1(\xi)$ и $\psi_2(\xi)$ – неслучайные функции, выбранные в соответствии с граничными условиями

¹ Статья проиллюстрирована авторскими рисунками.

Для свободных членов $\tilde{\alpha}_{i,p}$ значения математических ожиданий и дисперсий примут вид:

$$\begin{cases} M\{\tilde{\alpha}_{i,p}\} = \frac{\langle p \rangle L^4}{EI} \int_{-1}^1 \psi_i(\xi) d\xi; & (32) \\ D_{\tilde{\alpha}_{i,p}} = \frac{\sigma^2 L^8}{(EI)^2} \iint_{-1}^1 \psi_i(\xi) \psi_i(\xi') e^{-\beta|\xi-\xi'|} \cdot \cos[\gamma(\xi-\xi')] d\xi d\xi'; & (33) \end{cases}$$

Решим стохастическую систему (29) с использованием различных законов распределения случайных коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$: закон нормального распределения, распределение Стьюдента, закон распределения Лапласа, при которых значения их первых двух моментов ($M\{\tilde{\alpha}_{m,n}\}$ и $D_{\tilde{\alpha}_{m,n}}$) остаются постоянными. Расчёт по предложенной методике выполнялся в среде MATLAB R2024a со следующими исходными данными: полудлина балки $l = 10$ м, погонная масса балки $m_0 = 500$ кг/м, погонная масса присоединенного грунта $m_1 = 200$ кг/м, изгибная жесткость балки $EI = 0,1 \cdot 10^8$ [Н·м²], математическое ожидание коэффициента постели $\langle C_1 \rangle = 0,15 \cdot 10^8$ Н/м², математическое ожидание коэффициента постели $\langle C_2 \rangle = 0,05 \cdot 10^8$ Н/м², дисперсия

коэффициента постели $D_{C_1} = 0,1 \cdot 10^{13}$ (Н/м²)², дисперсия коэффициента постели $D_{C_2} = 0,05 \cdot 10^{13}$ (Н/м²)², коэффициенты затухания корреляционных функций $v_1 = v_2 = v_{12} = 0,5$ м⁻¹, коэффициенты периодичности корреляционных свойств основания $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_{12} = 0,3$ м⁻¹, частота вынужденных колебаний $\theta = 5$ с⁻¹, амплитудное значение распределённой нагрузки $\langle p \rangle = 0,25 \cdot 10^6$ Н/м, дисперсия случайной функции $\tilde{p}(x)$: $\sigma^2 = 0,01 \cdot 10^{11}$ Н²/м², параметры корреляционной функции $\beta = 0,5$, $\gamma = 0,3$, коэффициент взаимной корреляции между коэффициентами постели $\tilde{C}_1(x)$ и $\tilde{C}_2(x)$: $\rho = 0,8$, степень свободы $\nu = 7$ (для моделирования коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ с помощью распределения Стьюдента), число испытаний $N = 30000$.

Гистограммы распределения случайных коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ и $\tilde{\alpha}_{i,p}$ представлены на рисунках 2, 3, 4.

Гистограммы распределения случайных коэффициентов \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 представлены на рисунках 5, 6, 7, а их вероятностные характеристики приведены в таблице 1.

Построены эпюры математических ожиданий и стандартов прогибов (рис. 8, 9, 10), их значения в сечениях с шагом $\xi = 0,1$ приведены в таблице 2.

Таблица 1. Статистические характеристики случайных коэффициентов \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2

Статистические характеристики	при нормальном распределении коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$		при распределении Стьюдента коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ ($\nu=7$)		при распределении Лапласа коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$	
	\tilde{A}_1	\tilde{A}_2	\tilde{A}_1	\tilde{A}_2	\tilde{A}_1	\tilde{A}_2
Математическое ожидание	$-0,5114 \cdot 10^{-2}$	$-2,679 \cdot 10^{-5}$	$-0,5129 \cdot 10^{-2}$	$-5,145 \cdot 10^{-5}$	$-0,5122 \cdot 10^{-2}$	$7,183 \cdot 10^{-5}$
Дисперсия	$1,019 \cdot 10^{-6}$	$1,054 \cdot 10^{-4}$	$1,283 \cdot 10^{-6}$	$1,724 \cdot 10^{-4}$	$1,895 \cdot 10^{-6}$	$1,939 \cdot 10^{-4}$
Смешанная дисперсия	$-3,878 \cdot 10^{-8}$		$-3,92 \cdot 10^{-7}$		$1,167 \cdot 10^{-7}$	
Стандарт	$1,01 \cdot 10^{-3}$	$1,026 \cdot 10^{-2}$	$1,133 \cdot 10^{-3}$	$1,313 \cdot 10^{-2}$	$1,376 \cdot 10^{-3}$	$1,392 \cdot 10^{-2}$
Асимметрия	-0,9245	0,05744	-3,191	-4,609	-6,334	5,162
Экссесс	5,066	4,823	91,71	814	863,5	1070
Медиана	$-0,4996 \cdot 10^{-2}$	$-3,103 \cdot 10^{-5}$	$-0,4999 \cdot 10^{-2}$	$-6,023 \cdot 10^{-5}$	$-0,4989 \cdot 10^{-2}$	$4,649 \cdot 10^{-5}$
Мода	$-0,1325 \cdot 10^{-1}$	$-0,7915 \cdot 10^{-1}$	$-0,465 \cdot 10^{-1}$	-0,7869	$-0,8855 \cdot 10^{-1}$	-0,7523

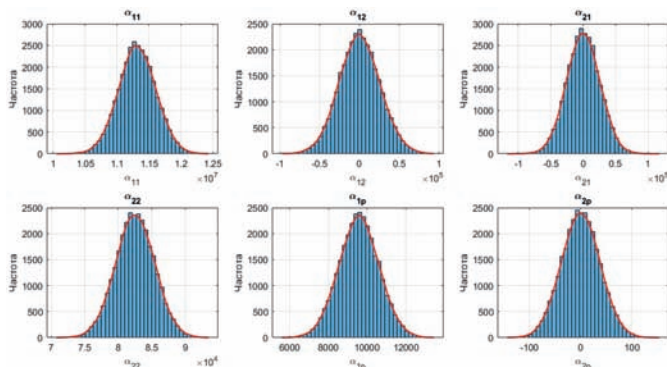


Рис. 2. Гистограммы распределения случайных коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ и $\tilde{\alpha}_{i,p}$ при нормальном законе распределения коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$

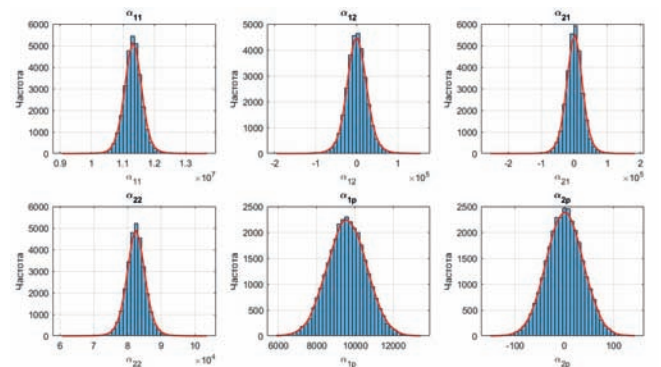


Рис. 3. Гистограммы распределения случайных коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ и $\tilde{\alpha}_{i,p}$ при законе распределения Стьюдента при $\nu=7$ коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$

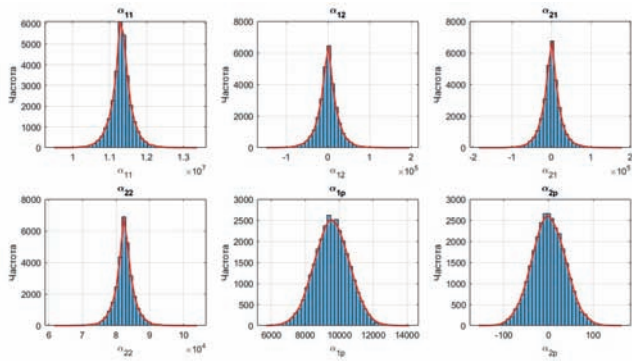


Рис. 4. Гистограммы распределения случайных коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ и $\tilde{\alpha}_{i,p}$ при законе распределения Лапласа коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$

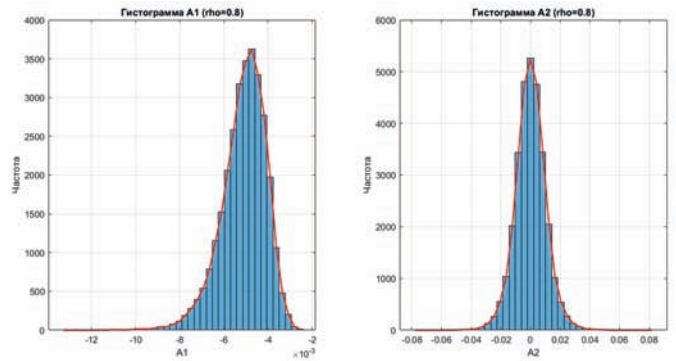


Рис. 5. Гистограммы распределения случайных коэффициентов \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 при нормальном законе распределения коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$

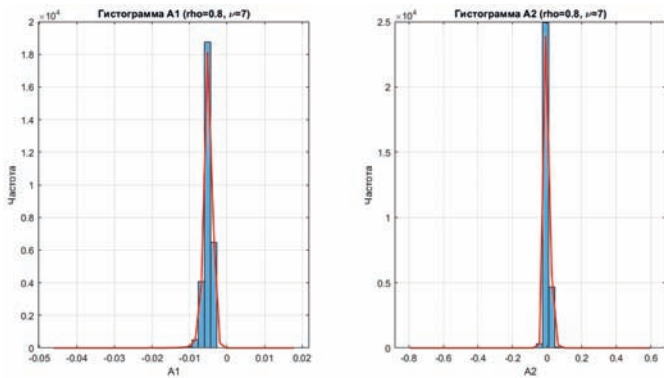


Рис. 6. Гистограммы распределения случайных коэффициентов \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 при законе распределения Стьюдента при $\nu=7$ коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$

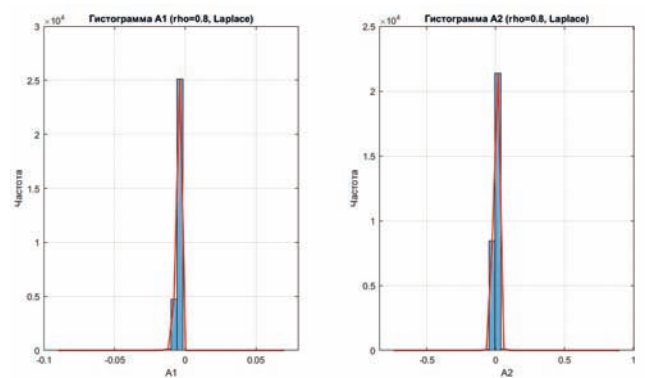


Рис. 7. Гистограммы распределения случайных коэффициентов \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 при законе распределения Лапласа коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$

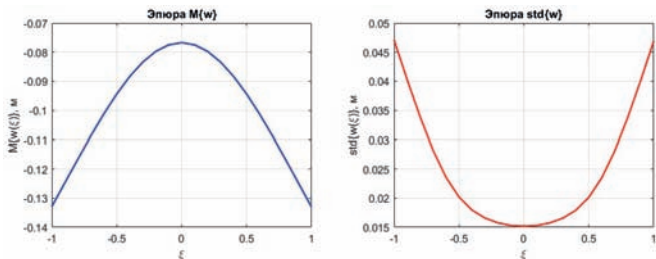


Рис. 8. Эпюры математических ожиданий, стандартов прогибов балки при нормальном законе распределения коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$

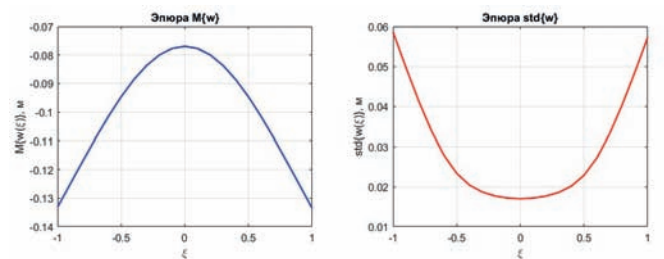


Рис. 9. Эпюры математических ожиданий, стандартов прогибов балки при законе распределения Стьюдента при $\nu=7$ коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$

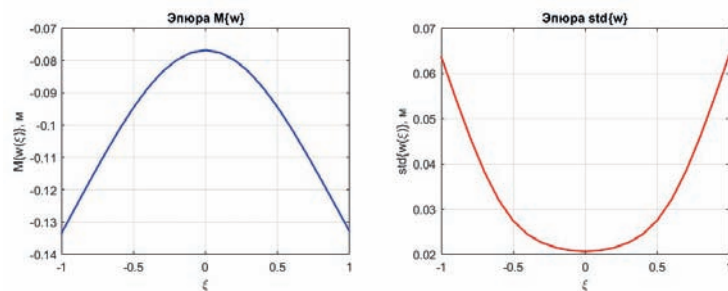


Рис. 10. Эпюры математических ожиданий, стандартов прогибов балки при законе распределения Лапласа коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$

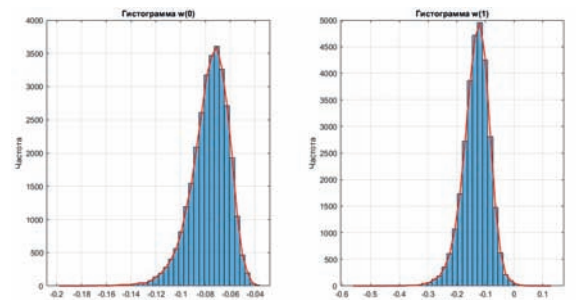


Рис. 11. Гистограммы распределения значений прогибов балки в сечениях $\zeta=0$ и $\zeta=1$ при нормальном законе распределения коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$

Гистограммы распределения значений прогибов балки в сечениях $\xi = 0$ и $\xi = 1$ представлены на рисунках 11, 12, 13.

Анализируя полученные данные и рассматривая гистограммы распределений случайных коэффициентов \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 , можно заметить, что для всех трёх законов распределения коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ расхождение в значениях математических ожиданий коэффициентов \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 составляет не более

0,3%. Следовательно, выбор закона распределения входных коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ метода Монте-Карло при фиксированных значениях первых двух моментов практически не влияет на средние прогибы балки, что можно наблюдать по значениям математических ожиданий прогибов балки в таблице 2.

Однако переход от нормального распределения к Стюденту и особенно – к Лапласу, существенно увеличивает

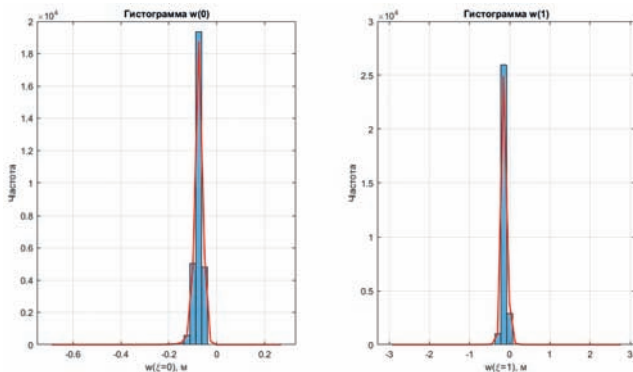


Рис. 12. Гистограммы распределения значений прогибов балки в сечениях $\xi=0$ и $\xi=1$ при законе распределения Стюдента при $\nu=7$ коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$

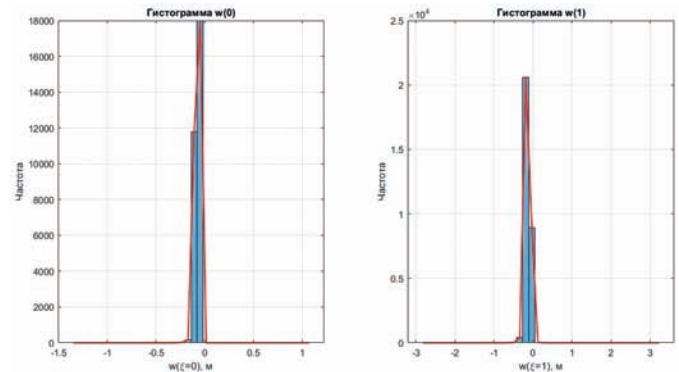


Рис. 13. Гистограммы распределения значений прогибов балки в сечениях $\xi=0$ и $\xi=1$ при законе распределения Лапласа коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$

Таблица 2. Значения математических ожиданий и стандартов прогибов балки в сечениях с шагом $\xi=0,1$

Сечение балки	При нормальном распределении коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$		При распределении Стюдента коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n} (\nu=7)$		При распределении Лапласа	
	$M\{w(\xi)\}, м$	$\sigma\{w(\xi)\}, м$	$M\{w(\xi)\}, м$	$\sigma\{w(\xi)\}, м$	$M\{w(\xi)\}, м$	$\sigma\{w(\xi)\}, м$
$\xi=-1$	-0,1329	0,0471	-0,1332	0,0586	-0,1335	0,0637
$\xi=-0,9$	-0,1247	0,0403	-0,125	0,0498	-0,1252	0,0545
$\xi=-0,8$	-0,1166	0,0339	-0,1169	0,0415	-0,117	0,0459
$\xi=-0,7$	-0,1087	0,0282	-0,109	0,034	-0,1091	0,0382
$\xi=-0,6$	-0,1012	0,0236	-0,1015	0,0279	-0,1015	0,032
$\xi=-0,5$	-0,0944	0,0202	-0,0946	0,0234	-0,0946	0,0274
$\xi=-0,4$	-0,0883	0,0179	-0,0886	0,0204	-0,0885	0,0244
$\xi=-0,3$	-0,0834	0,0166	-0,0837	0,0187	-0,0836	0,0226
$\xi=-0,2$	-0,0797	0,0158	-0,08	0,0177	-0,0799	0,0215
$\xi=-0,1$	-0,0775	0,0153	-0,0777	0,0172	-0,0776	0,0209
$\xi=0$	-0,0767	0,0151	-0,0769	0,017	-0,0768	0,0206
$\xi=0,1$	-0,0775	0,0153	-0,0777	0,0172	-0,0776	0,0209
$\xi=0,2$	-0,0797	0,0157	-0,08	0,0177	-0,0799	0,0215
$\xi=0,3$	-0,0834	0,0166	-0,0837	0,0186	-0,0836	0,0226
$\xi=0,4$	-0,0884	0,0179	-0,0886	0,0202	-0,0885	0,0245
$\xi=0,5$	-0,0944	0,0201	-0,0947	0,0229	-0,0945	0,0275
$\xi=0,6$	-0,1013	0,0235	-0,1016	0,0272	-0,1013	0,0322
$\xi=0,7$	-0,1088	0,0281	-0,1092	0,0331	-0,1088	0,0384
$\xi=0,8$	-0,1167	0,0338	-0,1171	0,0404	-0,1167	0,0462
$\xi=0,9$	-0,1249	0,0402	-0,1253	0,0486	-0,1248	0,0549
$\xi=1,0$	-0,1331	0,0469	-0,1336	0,0573	-0,1329	0,0641

дисперсии коэффициентов \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 – до 80% у коэффициента \tilde{A}_2 . Рост дисперсий коэффициентов \tilde{A}_m при смене законов распределения коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ прямо ведёт к росту стандартов прогибов балки. Стандартные отклонения прогибов увеличиваются по всему пролету: примерно на 10-25% для закона распределения Стьюдента и на 35-40% для закона Лапласа, что также можно заметить по таблице 2. Таким образом, для оценки вариаций прогибов и вероятности превышения предельных значений вид закона распределения $\tilde{\alpha}_{m,n}$ уже критичен – Стьюдент и Лаплас дают заметно более высокие значения стандартов прогибов балки.

По анализу гистограмм заметно, что при нормальном законе $\tilde{\alpha}_{m,n}$ распределения \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 и $w(\xi=0), w(\xi=1)$ относительно близки к нормальному, но с умеренным эксцессом, а также с лёгкой левосторонней асимметрией $\tilde{A}_1, (\xi=0), w(\xi=1)$. При переходе к распределению Стьюдента (при $\nu=7$) коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ наблюдается значительный рост эксцесса, значение которого при Лапласе становится ещё более высоким. Это означает, что для распределения Стьюдента и особенно Лапласа гистограммы $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, w(\xi)$ становятся резко островершинными с выраженными «тяжёлыми хвостами», что указывает на существенно повышенную вероятность редких больших отклонений прогибов по сравнению с случаем нормального распределения коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$.

Выводы

- Предложенный в работе алгоритм динамического расчёта методом статистического моделирования Монте-Карло балки конечной длины, расположенной на стохастическом упругом основании Власова-Пастернака с двумя коэффициентами постели $\tilde{C}_1(x), \tilde{C}_2(x)$, на которую действует случайная вибрационная нагрузка, меняющаяся по координате балки случайным образом, позволяет учесть статистическую неоднородность грунтового основания, включая возможность использования нескольких видов закона распределения (нормальный, Стьюдента, Лапласа) входных коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ метода Монте-Карло.

- Разработанная методика позволяет получить эпюры математических ожиданий и стандартов в сечениях балки при различных законах распределения входных коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ при сохранении постоянных $M\{\tilde{\alpha}_{m,n}\}$ и $D_{\tilde{\alpha}_{m,n}}$. Вид закона распределения практически не оказывает влияние на средние прогибы балки, однако уровень разброса (значение дисперсии) и сам характер распределения прогибов балки сильно изменяются. При переходе от нормального распределения к Стьюденту, а потом и к Лапласу наблюдается возрастание островершинности с заметным утяжелением хвостов распределения, что значительно повышает риск появления редких экстремальных прогибов.

- Таким образом, выбор закона распределения коэффициентов $\tilde{\alpha}_{m,n}$ должен определяться комплексом факторов: уровнем надёжности сооружения, достоверностью исходных данных о грунте.

Так, нормальное распределение следует применять при достаточно большом объёме экспериментальных данных по грунту для сооружений обычной степени ответственности и при предварительных оценках.

В случае, когда параметры основания (коэффициенты постели и т.д.) определены по ограниченному числу неоднородных измерений, следует применять распределение Стьюдента.

При слабой изученности основания и возможном наличии локальных аномалий (просадки, техногенные вмешательства, нештатные динамические воздействия), а также для анализа наихудших случаев при проектировании особо ответственных конструкций, для которых необходимо учесть риск редких неблагоприятных реализаций прогибов, следует принимать распределение Лапласа.

Список источников / References

- Соболев, Д.Н. К расчёту конструкций, лежащих на статистически неоднородном основании при помощи модели с двумя коэффициентами постели / Д.Н. Соболев // Строительная механика и расчет сооружений. 1975. №3. С. 27–31.
Sobolev D.N. On the Calculation of Structures Lying on a Statistically Inhomogeneous Foundation Using a Model with Two Bedding. In: *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, 1975, no. 3, pp. 27–31. (In Russ.)
- Дёминов, П.Д. Оценка вероятности образования запредельных прогибов после образования трещин в железобетонной балке на стохастическом основании / П.Д. Дёминов // Строительство и реконструкция. 2022. № 1 (99). С. 3–10.
Deminov P.D. Evaluation of the Probability of the Formation of Ultimate Deflections in a Reinforced Concrete Beam with Cracks on a Stochastic Basis. In: *Construction and Reconstruction*, 2022, no. 1 (99), pp. 3–10. (In Russ., abstr. In Engl.)
- Дёминов, П.Д. Оценка вероятности разрушения железобетонной балки, лежащей на стохастическом упругом основании с двумя коэффициентами податливости, по наклонному сечению от поперечной силы / П.Д. Дёминов // Строительство и реконструкция. 2021. № 1 (93). С. 16–25.
Deminov P.D. Estimation of the Failure Probability of a Reinforced Concrete Beam Lying on a Stochastic Elastic Base with Two Pressure Coefficients, on an Inclined Section from the Lateral Force. In: *Construction and Reconstruction*, 2021, No. 1(93), pp. 16–25. (In Russ., abstr. In Engl.)
- Дёминов, П.Д. Оценка вероятности возникновения недопустимых прогибов в железобетонной балке, лежащей на стохастическом основании с двумя коэффициентами постели, под действием нестационарной случайной нагрузки / П.Д. Дёминов // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2019. № 4 (382). С. 48–54.
Deminov P.D. Estimation of the Probability of Occurrence of Unacceptable Deflections in a Reinforced Concrete Beam, Resting on a Stochastic Foundation with Two Bed Coefficients, Under the Action of a Non-Stationary Random Load. In: *Proceedings of Higher Education Institutions. Textile Industry*

Technology, 2019, no. 4 (382), pp. 48–54. (In Russ., abstr. in Engl.)

5. Мондрус, В.Л. Частоты собственных колебаний балки на стохастическом упругом основании / В.Л. Мондрус, Р.В. Попов // Промышленное и гражданское строительство. 2025. № 9. С. 12–19.

Mondrus V.L., Popov R.V. Natural Vibration Frequencies of a Beam on a Stochastic Elastic Foundation. In: *Industrial and Civil Engineering*, 2025, no. 9, pp. 12–54. (In Russ., abstr. in Engl.)

6. Болотин, В.В. Об упругих деформациях подземных трубопроводов, прокладываемых в статистически неоднородном грунте / В.В. Болотин // Строительная механика и расчет сооружений. 1965. № 1. С. 4–8.

Bolotin, V.V. On Elastic Deformations of Underground Pipelines Laid in Statistically Heterogeneous Soil. In: *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, 1965, no. 1, pp. 4–8. (In Russ.)

7. Благонадёжин, В.Л. Статистическое исследование деформаций песчаных оснований и трубопроводов подземных волноводных линий связи / В.Л. Благонадёжин, Е.П. Кудрявцев // Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1964–1965 г. Секция динамики и прочности машин. М.: МЭИ, 1965. С. 78–86.

Blagonadezhin V.L., Kudryavtsev E.P. Statistical Study of Deformations of Sand Foundations and Pipelines of Underground Waveguide Communication Lines. In: *Reports of the Scientific and Technical Conference on the Results of Research Work for 1964–1965. Section of Machine Dynamics and Strength*. Moscow, MPEI Publ., 1965. pp. 78–86. (In Russ.)

8. Яглом, А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций с примерами из метеорологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 280 с.

Yaglom, A.M. Correlation Theory of Stationary Random Functions with Examples from Meteorology. Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1981. 280 p. (In Russ.)

9. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей: учебник для студентов высших технических учебных заведений / Е.С. Вентцель, Е.С. Вентцель. 11-е изд., стер. М.: КноРус, 2010. 664 с.

Venttsel E.S. Probability Theory. Moscow, KnoRus Publ., 11th ed., reprinted 2010, 658 p. (In Russ.)

10. Хинчин, А.Я. Теория корреляции стационарных статистических процессов / А.Я. Хинчин // Успехи математических наук. М.: Наука, 1938. Выпуск 5. С. 42–51.

Khinchin A.Ya. Correlation Theory of Stationary Statistical Processes. In: *Advances in Mathematical Sciences*. Moscow, Nauka Publ., 1938, Iss. 5. pp. 42–51. (In Russ.)