

Об одном подходе к расчету круговых цилиндрических оболочек

Абазов Анатолий Билялович (Нальчик). Кандидат технических наук. Эл. почта: a.abazov@gmail.com

Абазов Алим Анатольевич (Нальчик). Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова. Эл. почта: alabaz@ya.ru

Аннотация. Рассмотрена задача по расчёту цилиндрической оболочки в обычной линейной постановке. Приведён расчёт круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины при осесимметричном нагружении несколькими различными нагрузками как стержневой системы. Для этого используется полоска единичной ширины, вырезанная из оболочки, которая считается балкой на упругом основании с известным коэффициентом постели. Сформулированы необходимые условия для такого выбора. Расчёт балки-полоски на упругом основании производится методом начальных параметров проф. В.А. Киселёва.

Результаты расчёта по данной методике совпадают с имеющимися в литературе. Для цилиндрической оболочки построены эпюры внутренних усилий и нормальных перемещений M_x , Q , W , T_0 в компьютерной среде Matlab 6.1 при совместном воздействии всех нагрузок. Точность расчёта оболочки достигается коэффициентом деформации балки-полоски на упругом основании.

Ключевые слова: Цилиндрическая оболочка, осесимметричное нагружение, упругое основание, балка-полоска.

Для цитирования. Абазов А.Б., Абазов А.А. Об одном подходе к расчёту круговых цилиндрических оболочек // Academia. Архитектура и строительство. 2026. № 3. С. 129–133. DOI: 10.22337/2077-9038-2026-3-129-133.

On One Approach to the Calculation of Circular Cylindrical Shells

Abazov Anatolii B. (Nal'chik). Candidate of Sciences in Technology. E-mail: a.abazov@gmail.com

Abazov Alim A. (Nal'chik). Kabardino-Balkarian State University Named after H.M. Berbekov. E-mail: alabaz@ya.ru

Abstract. The problem of calculating a cylindrical shell in the usual linear formulation is considered. The calculation of a circular cylindrical shell of constant thickness under osmometric loading by several different loads as a core system is given. For this purpose, a strip of unit width is used, cut from the shell, which is considered to be a beam on an elastic base with a known bed coefficient. The necessary conditions for such a choice are formulated. The calculation of the strip beam on an elastic base is carried out by the method of initial parameters of Professor V.A. Kiselyov.

The calculation results using this technique coincide with those available in the literature (Timoshenko, Boyarshinov, etc.). For a cylindrical shell, plots of internal forces and normal displacements M_x , Q , W , T_0 are constructed in the Matlab 6.1 computer environment under the influence of all loads. The accuracy of the shell calculation is achieved by the coefficient of deformation of the strip beam on an elastic base.

Keywords: cylindrical shell, axisymmetric loading, elastic base, strip beam

For citation. Abazov A.B., Abazov A.A. On One Approach to the Calculation of Circular Cylindrical Shells. In: *Academia. Architecture and Construction*, 2026, no. 3, pp. 129–133, doi: 10.22337/2077-9038-2026-3-129-133.

Тонкостенные оболочки широко используются в технике, промышленности и строительстве. Теория оболочек построена трудами многих учёных и ей посвящены многочисленные монографии и научные статьи как в нашей стране, так и за рубежом [1–7]. Из всех типов оболочек наибольшее распространение получили цилиндрические оболочки.

Расчёт цилиндрических оболочек с несколькими осесимметричными нагрузками и участками по формулам теории оболочек представляет собой сложную задачу. Один из возможных вариантов её простого решения состоит в использовании расчётного аппарата балок на упругом основании, что соответствует [4]. Это и составляет основную идею данного подхода к расчёту оболочек.

Дифференциальное уравнение изгиба цилиндрической оболочки при осесимметричной деформации имеет вид:

$$w_{xxxx} + 4\beta^4 w = p/D, \quad (1)$$

то же балки на упругом основании

$$v_{xxxx} + 4m^4 v = q/EI, \quad (2)$$

$$\text{где } \beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}}, \quad m = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EI}}, \quad (3)$$

D – цилиндрическая жёсткость оболочки; EI – изгибная жёсткость балки на упругом основании; p, q – интенсивности равномерно распределённых нормальных нагрузок оболочки и балки.

Из сравнения уравнений (1) и (2) видно, что они имеют одинаковую структуру, и этим воспользуемся. Сведём расчёт цилиндрической оболочки к расчёту балки на упругом основании [8]. Вырежем из оболочки с внешней нагрузкой полосу единичной ширины ($b=1$) меридиональными сечениями. Высота полосы равна толщине оболочки (h). Как известно, такую полосу можно рассматривать как балку на упругом основании с коэффициентом постели $k=Eh/R^2$ (R – радиус цилиндра) [9]. Поэтому назовём её балкой-полоской на упругом основании. Считая поперечное сечение близким к прямоугольному, определим момент инерции $I=h^3/12$. Балка-полоска из оболочки обладает большей изгибной жёсткостью (за счёт соседних полосок), чем обычная отдельно стоящая балка-полоска. Поэтому принимаем её жёсткость равной

$$EI' = \frac{EI}{1-\nu^2},$$

где ν – коэффициент Пуассона, E – модуль упругости.

Для балки-полоски определим величину m с учётом вышеизложенного:

$$m = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EI'}} = \sqrt[4]{\frac{Eh}{R^2} \cdot \frac{12(1-\nu^2)}{4Eh^3}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}} = \beta. \quad (4)$$

Таким образом, данное условие ($m=\beta$) является необходимым и достаточным, чтобы заменить расчёт цилиндрической оболочки расчётом балки-полоски из неё без потери точности. Оно приводит к одному и тому же дифференциальному

уравнению, а значит, результаты расчётов будут совпадать. Это возможно при условиях:

- нагрузка на цилиндрическую оболочку осесимметрична;
- балка-полоска на упругом основании имеет коэффициент постели $k=Eh/R^2$
- жёсткость балки-полоски равна $EI' = \frac{EI}{1-\nu^2}$;
- граничные условия, нагрузка балки-полоски и оболочки одинаковы;
- толщина оболочки постоянна.

Такой подход к расчёту цилиндрических оболочек целесообразен при большом количестве действующей нагрузки, так как уменьшается трудоёмкость. Стержневую систему рассчитать всегда проще, чем оболочку. Для расчёта балки-полоски удобным является метод начальных параметров В.А. Киселёва [10]. Им выведены соответствующие формулы для определения усилий и перемещений от различных нагрузок при любом количестве участков балки на упругом основании. Воспользуемся этим методом, сохраняя обозначения, принятые автором.

В качестве иллюстрации рассмотрим цилиндрическую оболочку со свободными краями на действие осесимметричных разных нагрузок. Пусть оболочка нагружена кольцевыми сосредоточенными нагрузками величиной M и F , кольцевой полосовой нагрузкой p , равномерно распределённой на участке поверхности длиной s по рисунку 1. Определим усилия и перемещения в цилиндрической оболочке, рассматривая соответствующую балку-полоску с нагрузкой из неё (рис. 2). При таком нагружении цилиндрическая оболочка и балка-полоска имеют по длине шесть участков, они обозначены арабскими цифрами.

Рассчитаем её как балку-полоску на упругом основании (см. рис. 2), в системе координат XY с началом на левом конце.

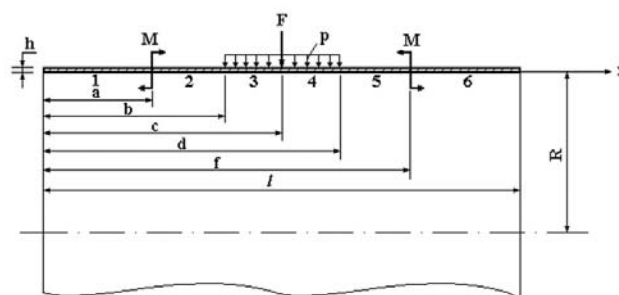


Рис. 1. Схема нагружения цилиндрической оболочки

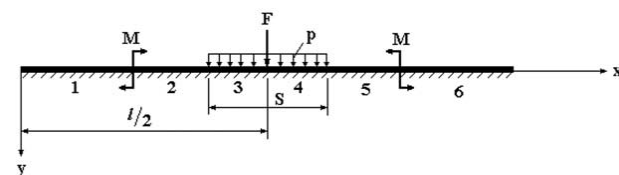


Рис. 2. Схема балки-полоски на упругом основании

На первом участке, в частности, для определения M и Q формулы В.А. Киселёва имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M_0 A_z + \frac{Q_0}{m} B_z + S_0 C_z + N_0 D_z, \\ Q_1 &= -4m M_0 D_z + Q_0 A_z + m S_0 B_z + m N_0 C_z, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

здесь M_0, Q_0, S_0, N_0 – начальные параметры, A_z, B_z, C_z, D_z – гиперголо-тригонометрические функции (функции А.Н. Крылова), зависящие от безразмерной координаты $z=mx$, принимаем $m = \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}}$.

Функции А.Н.Крылова имеют вид:

$$\begin{aligned} A_z &= \cos z \operatorname{ch} z, \\ B_z &= \frac{1}{2} [\sin z \operatorname{ch} z + \cos z \operatorname{sh} z], \\ C_z &= \frac{1}{2} \sin z \operatorname{sh} z, \\ D_z &= \frac{1}{4} [\sin z \operatorname{ch} z - \cos z \operatorname{sh} z]. \end{aligned}$$

Определим начальные параметры из условий на краях балки-полоски. Для данного случая граничные условия:

$$\text{при } x=0 (z=mx=0) \quad M=M_0=0, \quad Q=Q_0=0, \quad (6)$$

$$x=l (z=ml) \quad M=M_l=0, \quad Q=Q_l=0, \quad (7)$$

По формулам (5) с учётом условий (6) получим:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= S_0 C_z + N_0 D_z, \\ Q_1 &= m S_0 B_z + m N_0 C_z, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} x=a \quad m^*a=\alpha; \quad x=b \quad m^*b=\epsilon; \quad x=c \quad m^*c=\gamma; \\ x=d \quad m^*d=\delta; \quad x=f \quad m^*f=\theta; \quad x=l \quad m^*l=\lambda. \end{aligned}$$

Чтобы воспользоваться условиями (7) нужно составить выражения для M_l и Q_l шестого участка. При переходе от участка к следующему участку получаем приращения нагрузок. Определив эти приращения для участков, пользуясь формулами В.А. Киселёва для второго участка, получим дополнительные члены для каждого участка:

для 1 уч.	для 2 уч.	для 3 уч.	для 4 уч.	для 5 уч.	для 6 уч.	
$M_l = S_0 C_z + N_0 D_z$	$+M A_{z-\alpha}$	$-\frac{p}{m^2} C_{z-\epsilon}$	$-\frac{p}{m^2} C_{z-\epsilon}$	$+\frac{p}{m^2} C_{z-\delta}$	$-M A_{z-\theta}$	(9)
$Q_l = m S_0 B_z + m N_0 C_z$	$-4m M D_{z-\alpha}$	$-\frac{p}{m} B_{z-\epsilon}$	$-F A_{z-\gamma}$	$+\frac{p}{m} B_{z-\delta}$	$+4m M D_{z-\theta}$	

Тогда получим уравнения для M и Q шестого участка в общем виде:

$$\left. \begin{aligned} M_l &= S_0 C_z + N_0 D_z + M A_{z-\alpha} - \frac{p}{m^2} C_{z-\epsilon} - \frac{F}{m} B_{z-\gamma} + \frac{p}{m^2} C_{z-\delta} - M A_{z-\theta}, \\ Q_l &= m S_0 B_z + m N_0 C_z - 4m M D_{z-\alpha} - \frac{p}{m} B_{z-\epsilon} - F A_{z-\gamma} + \frac{p}{m} B_{z-\delta} + 4m M D_{z-\theta} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Если воспользоваться граничными условиями (7) и выражениями (10), приходим к системе уравнений для определения S_0 и N_0 :

$$\left. \begin{aligned} S_0 C_\lambda + N_0 D_\lambda + \Phi_1 &= 0, \\ m S_0 B_\lambda + m N_0 C_\lambda + \Phi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Откуда получим:

$$S_0 = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{m} \Phi_2 D_\lambda - \Phi_1 C_\lambda \right), \quad N_0 = \frac{1}{\Delta} \left(\Phi_1 B_\lambda - \frac{1}{m} \Phi_2 C_\lambda \right), \quad (12)$$

Величина $\Delta = C_\lambda^2 - B_\lambda D_\lambda$, через Φ_1 и Φ_2 обозначено:

$$\Phi_1 = M(A_{\lambda-\alpha} - A_{\lambda-\theta}) - \frac{F}{m} B_{\lambda-\gamma} + \frac{p}{m^2} (C_{\lambda-\delta} - C_{\lambda-\epsilon}), \quad (13)$$

$$\Phi_2 = 4m M(D_{\lambda-\theta} - D_{\lambda-\alpha}) - F A_{\lambda-\gamma} + \frac{p}{m} (B_{\lambda-\delta} - B_{\lambda-\epsilon}). \quad (14)$$

Определив начальные параметры, можно составить выражения для нахождения усилий и перемещений в сечениях цилиндрической оболочки от данной нагрузки по формулам балки на упругом основании:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= S_0 C_z + N_0 D_{z|1} + M A_{z-\alpha|2} - \frac{p}{m^2} C_{z-\epsilon|3} - \frac{F}{m} B_{z-\gamma|4} + \\ &\quad + \frac{p}{m^2} C_{z-\delta|5} - M A_{z-\theta|6}, \\ w &= \frac{m R^2}{E h} \left[m S_0 A_z + m N_0 B_{z|1} - 4m M C_{z-\alpha|2} - \frac{p}{m} A_{z-\epsilon} + \frac{p}{m^3} + 4 F D_{z-\frac{\lambda}{2}|4} + \frac{p}{m} A_{z-\delta|5} + \right. \\ &\quad \left. + 4m M C_{z-\theta|6} \right], \\ Q &= m S_0 B_z + m N_0 C_{z|1} - 4m M D_{z-\alpha|2} - \frac{p}{m} B_{z-\epsilon|3} - F A_{z-\gamma|4} + \frac{p}{m} B_{z-\delta|5} + \\ &\quad + 4m M D_{z-\theta|6}, \\ T_\theta &= m R [m S_0 A_z + m N_0 B_{z|1} - 4m M C_{z-\alpha|2} - \frac{p}{m} A_{z-\epsilon} + \frac{p}{m^3} + 4 F D_{z-\frac{\lambda}{2}|4} + \frac{p}{m} A_{z-\delta|5} + \\ &\quad + 4m M C_{z-\theta|6}], \\ M_\theta &= \nu M_x \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В качестве примера рассмотрена оболочка с параметрами и нагрузкой:

$$\begin{aligned} a=0,2 \text{ м}; \quad b=0,4 \text{ м}; \quad c=0,45 \text{ м}; \quad d=0,6 \text{ м}; \quad f=0,7 \text{ м}; \quad l=1 \text{ м}; \quad R=0,5 \text{ м}; \\ h=0,01 \text{ м}; \quad \nu=0,3; \quad M=5 \text{ кНм}; \quad F=30 \text{ кН}; \quad p=30 \text{ кН/м}^2 \end{aligned}$$

Эпюры M_x, Q, w, T_θ , построенные по этим данным в компьютерной среде Matlab 6.1, представлены на рисунке 3.

Если воспользоваться принципом независимости действия сил по формулам (12, 13, 14, 15), можно рассчитать оболочку при раздельном воздействии этих нагрузок.

Частные случаи

1. Пусть $F=p=0, M \neq 0$. Цилиндрическая оболочка нагружена двумя сосредоточенными кольцевыми моментами M , имеем три участка. Тогда из (13) и (14) получаем:

$$\Phi_1 = M(A_{\lambda-\alpha} - A_{\lambda-\theta}); \quad \Phi_2 = 4m M(D_{\lambda-\theta} - D_{\lambda-\alpha});$$

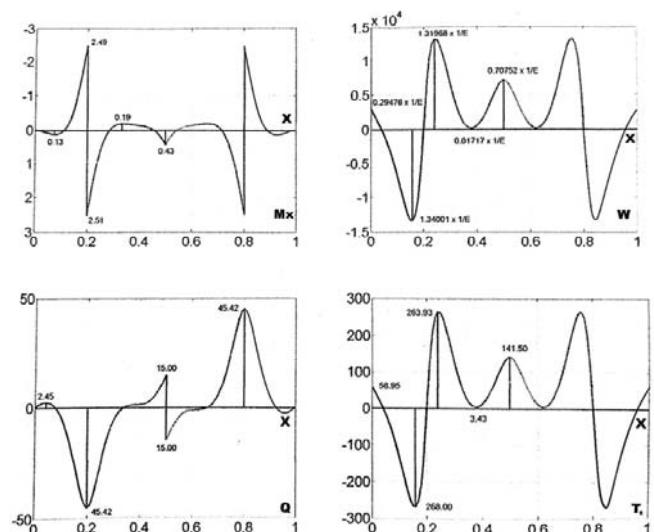


Рис. 3. Эпюры M_x, Q, w, T_θ

если $f = l - a$, то $A_{\lambda-\theta} = A_\alpha$ и $D_{\lambda-\theta} = D_\alpha$.

Для определения начальных параметров получаем формулы:

$$S_0 = -\frac{M}{\Delta} [C_\lambda (A_{\lambda-\alpha} - A_\alpha) + 4D_\lambda (D_{\lambda-\alpha} - D_\alpha)];$$

$$N_0 = \frac{M}{\Delta} [4C_\lambda (D_{\lambda-\alpha} - D_\alpha) + B_\lambda (A_{\lambda-\alpha} - A_\alpha)].$$

Если начальные параметры известны, то можно определить усилия и перемещения в любом сечении балки, а значит, цилиндрической оболочки. Для заданного частного случая изгибающие моменты (рис. 4 а) и нормальные перемещения в цилиндрической оболочке определяются:

$$M_x = S_0 C_z + N_0 D_z |_1 + M A_{z-\alpha} |_2 - M A_{z-\theta} |_3 \quad (16)$$

$$w = \frac{R^2}{Eh} (m^2 S_0 A_z + m^2 N_0 B_z |_1 - 4mMD_{z-\alpha} |_2 + 4Mm^2 C_{z-\theta} |_3)$$

2. Пусть $M=p=0, F \neq 0$. Имеем два участка, сосредоточенная нагрузка F приложена посередине длины.

В этом случае

$$\Phi_1 = -\frac{F}{m} B_{\lambda-\gamma}; \quad \Phi_2 = -FA_{\lambda-\alpha}.$$

Если $c = l$, то $B_{\lambda-\gamma} = B_{\lambda/2}$ и $A_{\lambda-\gamma} = A_{\lambda/2}$

Начальные параметры равны:

$$S_0 = \frac{F}{m\Delta} (B_{\lambda/2} C_\lambda - A_{\lambda/2} D_\lambda);$$

$$N_0 = \frac{F}{m\Delta} (A_{\lambda/2} C_\lambda - B_{\lambda/2} D_\lambda).$$

Усилия и перемещения оболочки определяются:

$$M_x = S_0 C_z + N_0 D_z |_1 - \frac{F}{m} B_{z-\lambda/2} |_2, \quad (17)$$

$$w = \frac{R^2}{Eh} (m^2 S_0 A_z + m^2 N_0 B_z |_1 + 4mFD_{z-\lambda/2} |_2)$$

3. Пусть $M=F=0, p \neq 0$. Полосовая, равномерно распределённая нагрузка приложена на части оболочки симметрично, имеем три участка.

По (13) и (14) имеем

$$\Phi_1 = \frac{p}{m^2} (C_{\lambda-\delta} - C_{\lambda-\varepsilon}); \quad \Phi_2 = \frac{p}{m} (B_{\lambda-\delta} - B_{\lambda-\varepsilon}).$$

Если $d = l - b, \delta = \lambda - \varepsilon$, то $C_{\lambda-\delta} = C_\varepsilon$ и $B_{\lambda-\delta} = B_\varepsilon$.

Тогда начальные параметры определяются:

$$S_0 = \frac{p}{m^2 \Delta} [C_\lambda (C_{\lambda-\varepsilon} - C_\varepsilon) - D_\lambda (B_{\lambda-\varepsilon} - B_\varepsilon)];$$

$$N_0 = \frac{p}{m^2 \Delta} [C_\lambda (B_{\lambda-\varepsilon} - B_\varepsilon) - B_\lambda (C_{\lambda-\varepsilon} - C_\varepsilon)].$$

Для определения внутренних усилий и перемещений на участках оболочки получаем:

$$w = \frac{R^2}{Eh} [m^2 S_0 A_z + m^2 N_0 B_z |_1 - p A_{z-\varepsilon} |_2 + p |_2 + p A_{z-\delta} |_3]; \quad (18)$$

$$M_x = S_0 C_z + N_0 D_z |_1 - \frac{p}{m^2} C_{z-\varepsilon} |_2 + \frac{p}{m^2} C_{z-\delta} |_3;$$

На рисунке 4 приведены эпюры M_x построенные с помощью соответствующих выражений для изгибающих моментов из формул (16), (17), (18) рассмотренных: (а) – для случая 1, (б) – для случая 2, (с) – для случая 3. Эпюры построены для короткой цилиндрической оболочки с параметрами:

$$\nu = 0,3, a = 7,5 \text{ см}, l = 25 \text{ см}, h = 1 \text{ см}, R = 20 \text{ см}, s = 7 \text{ см}$$

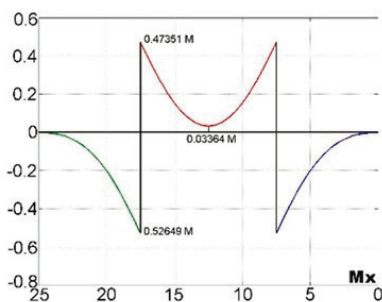
Интересно сравнить эпюру (а) с такой же эпюрой из [11], полученную совершенно по-другому для оболочки с данными размерами. Как тестовые были использованы примеры расчёта цилиндрических оболочек, изложенные в [8]. Для усилий и перемещений получились те же формулы.

Заключение

Данный подход к расчёту цилиндрических оболочек достаточно простой и может быть использован для практических расчётов. Формулы В.А. Киселёва и его метод расчёта балок на упругом основании позволяют учитывать воздействие различных нагрузок при различных их сочетаниях и количествах. Точность расчёта оболочки достигается коэффициентом деформации m балки-полоски, которого принимают равным β . Данная информация может быть полезна тем, кто занимается прочностными расчётами в области цилиндрических оболочек.

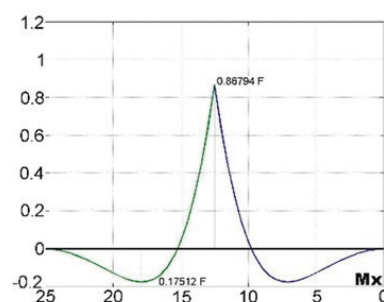
Список источников / References

1. Власов, В.З. Тонкостенные пространственные системы / В.З. Власов ; изд. 2-е. М. : Стройгиз, 1958. 502 с.

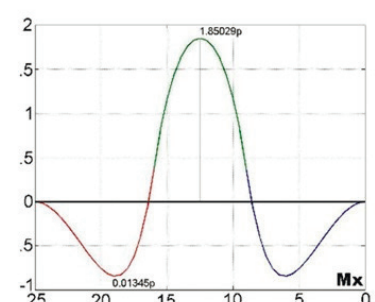


а)

Рис. 4. Эпюры M_x для частных случаев



б)



в)

Vlasov V.Z. Thin-Walled Spatial Systems. Ed. 2nd. Moscow, Stroygiz Publ., 1958. 502 p. (In Russ.)

2. Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. М. : Наука, 1976. 512 с.

Goldenweiser A.L. Theory of Elastic Thin Shells. Moscow, Nauka Publ., 1976, 512 p. (In Russ.)

3. Новожилов, В.В. Теория тонких оболочек / В.В. Новожилов. Л. : Судпромгиз, 1952. 344 с.

Novozhilov V.V. Theory of Thin Shells. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 1952. 344 p. (In Russ.)

4. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М. : Гос. изд. физ.-матем. лит., 1963. 635 с.

Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. Plates and Shells. Moscow, State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1963. 635 p. (In Russ.)

5. Чернина, В.С. Статика тонкостенных оболочек вращения / В.С. Чернина. М. : Наука, 1968. 455 с.

Chernina V.S. Statics of Thin-Walled Shells of Revolution. Moscow, Nauka Publ., 1968. 455 p. (In Russ.)

6. Vinson, J.R. (1989). Cylindrical Shells / J.R. Vinson // The Behavior of Thin Walled Structures: Beams, Plates, and Shells. Mechanics of Surface Structures, 1989, vol 8.

Vinson J.R. Cylindrical Shells. In: *The Behavior of Thin Walled Structures: Beams, Plates, and Shells. Mechanics of Surface Structures*, 1989, vol 8. (In Engl.)

7. Reissner, E. On Asymptotic Expansions for Circular Cylindrical Shells / E. Reissner // J. Appl. Mech., 1964. Vol. 31. P. 245–252.

Reissner E. On Asymptotic Expansions for Circular Cylindrical Shells. In: *J. Appl. Mech.*, 1964, Vol. 31, pp. 245–252. (In Engl.)

8. Абазов, А.Б. Расчёт цилиндрической оболочки как балки на упругом основании / А.Б. Абазов // Сборник научных трудов КБГСХА. Нальчик, 1998. Вып. 1. С. 36–42.

Abazov A.B. Calculation of a Cylindrical Shell as a Beam on an elastic Foundation. In: *Collection of Scientific Works of the KBGSHA*. Nalchik, 1998. Iss. 1. P. 36–42. (In Engl.)

9. Курс сопротивления материалов / М.М. Филоненко-Бородич, С.М. Изюмов [и др.]. М. : Гос. изд. техн.-теор. лит., 1955. 644 с.

Filonenko-Borodich M.M., Izyumov S.M. et al. Course on Strength of Materials. Moscow, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1955, 644 p. (In Russ.)

10. Киселёв, В.А. Балки и рамы на упругом основании / В.А. Киселёв. М. – Л. : ОНТИ, 1936. 228 с.

Kiselev V.A. Beams and Frames on an Elastic Base. Moscow – Leningrad, ONTI Publ., 1936. 228 p. (In Russ.)

11. Бояршинов, С.В. Основы строительной механики машин / С.В. Бояршинов. М. : Машиностроение, 1973. 454 с.

Boyarshinov S.V. Fundamentals of Structural Mechanics of Machines. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1973. 454 p. (In Russ.)