

Academia. Архитектура и строительство, № 2, стр. 171–176.

Academia. Architecture and Construction, no. 2, pp. 171–176.

Исследования и теория

Научная статья

УДК 691-3:531.2

DOI: 10.22337/2077-9038-2025-2-171-176

Анализ формул для определения поперечной силы, воспринимаемой бетоном при изгибе железобетонного элемента

Селяев Владимир Павлович (Саранск). Доктор технических наук, профессор, академик РААСН. Кафедра строительных конструкций Национального исследовательского Мордовского государственного университета имени Н.П. Огарёва (Россия, 430005, Саранск, ул. Большевикская, 68. МГУ им. Н.П. Огарева). Эл. почта: ntorm80@mail.ru

Уткина Вера Николаевна (Саранск). Кандидат технических наук, доцент. Кафедра строительных конструкций Национального исследовательского Мордовского государственного университета имени Н.П. Огарёва (Россия, 430005, Саранск, ул. Большевикская, 68. МГУ им. Н.П. Огарева). Эл. почта: uvn27@mail.ru

Селяев Павел Владимирович (Саранск). Кандидат технических наук, доцент. Кафедра строительных конструкций Национального исследовательского Мордовского государственного университета имени Н.П. Огарёва (Россия, 430005, Саранск, ул. Большевикская, 68. МГУ им. Н.П. Огарева). Эл. почта: ntorm80@mail.ru

Бабушкина Дельмира Рафиковна (Саранск). Кафедра строительных конструкций Национального исследовательского Мордовского государственного университета имени Н.П. Огарёва (Россия, 430005, Саранск, ул. Большевикская, 68. МГУ им. Н.П. Огарева). Эл. почта: delmira2009@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрены нормативные методы определения поперечной силы, воспринимаемой бетоном при изгибе железобетонного элемента. Показано, что условия прочности наклонных сечений, предлагаемые СП 63.13330.2012, сформированные с учётом первой теории прочности и экспериментальных данных, являются эмпирическими и не отвечают принципу (постулату) Н. Бора. Предложено модель разрушения бетона по наклонным сечениям формировать, используя методы: классической механики твёрдого тела, механики разрушения (по А. Гриффитсу), фрактальной геометрии (по Б. Мандельброту).

В процессе разрушения выделено три предельные состояния: первое – по образованию дефекта на уровне микроструктуры критического размера d ; второе – по образованию и развитию наклонной трещины; третье – по разрушению бетона сжатой зоны.

Ключевые слова: железобетонный элемент, поперечная сила, фрактал, механика разрушения, условия прочности

Для цитирования. Селяев В.П., Уткина В.Н., Селяев П.В., Бабушкина Д.Р. Анализ формул для определения поперечной силы, воспринимаемой бетоном при изгибе железобетонного элемента // Academia. Архитектура и строительство. – 2025. – № 2. – С. 171–176. – DOI: 10.22337/2077-9038-2025-2-171-176.

Analysis of Formulas for Determining the Transverse Force Perceived by Concrete When Bending a Reinforced Concrete Element

Selyaev Vladimir P. (Saransk). Doctor of Sciences in Technology, Professor, Academician of RAACS. The Department of Building Structures of The National Research Ogarev Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St, Saransk. 430005, Russia. MRSU). E-mail: ntorm80@mail.ru

© Селяев В.П., Уткина В.Н., Селяев П.В., Бабушкина Д.Р., 2025.

Utkina Vera N. (Saransk). Candidate of Sciences in Technology, Docent. The Department of Building Structures of The National Research Ogarev Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St, Saransk. 430005, Russia. MRSU). E-mail: uvn27@mail.ru

Selyaev Pavel V. (Saransk). Candidate of Sciences in Technology, Docent. The Department of Building Structures of The National Research Ogarev Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St, Saransk. 430005, Russia. MRSU). E-mail: ntorm80@mail.ru

Babushkina Del'mira R. (Saransk). The Department of Building Structures of The National Research Ogarev Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St, Saransk. 430005, Russia. MRSU). E-mail: delmira2009@yandex.ru

Abstract. The normative methods for determining the transverse force perceived by concrete during bending of a reinforced concrete element are considered. It has been shown that the strength conditions of inclined sections proposed by SP 63.13330.2012, formed taking into account the first theory of strength and experimental data, are empirical and do not meet the principle (postulate) of N. Bohr. A model of concrete fracture in inclined sections is proposed using the methods of classical solid mechanics, fracture mechanics (according to A. Griffith), and fractal geometry (according to B. Mandelbrot).

In the process of destruction, three limiting states are identified: the first is the formation of a defect at the microstructure level of critical size d ; the second is the formation of an inclined crack; the third is the destruction of concrete in a compressed zone.

Keywords: reinforced concrete element, transverse force, fractal, fracture mechanics, strength conditions

For citation. Selyaev V.P., Utkina V.N., Selyaev P.V., Babushkina D.R. Analysis of Formulas for Determining the Transverse Force Perceived by Concrete When Bending a Reinforced Concrete Element. In: *Academia. Architecture and Construction*, 2025, no. 2, pp. 171–176, doi: 10.22337/2077-9038-2025-2-171-176.

Разрушение железобетонных изгибаемых элементов по наклонным сечениям под действием поперечных сил – явление достаточно сложное и зависит от многих причин: конструктивных особенностей изгибаемого элемента, способа приложения и распределения внешних воздействий (силовых и агрессивных сред), вида и способа армирования.

В СП 63.13330.2012¹ предлагается расчёт по прочности железобетонных элементов при действии поперечных сил производить на основе модели наклонных сечений, рассматривая условия прочности: по наклонной полосе между наклонными трещинами, по наклонной трещине, по наклонной сжатой полосе. При расчёте железобетонных элементов по наклонным сечениям на действие поперечных сил предлагается применять условие:

$$Q \leq Q_b + Q_{sw} \quad (1)$$

где Q – поперечная сила в наклонном сечении от внешней нагрузки, расположенной по одну сторону от рассматриваемого сечения; Q_b – поперечная сила, воспринимаемая бетоном в наклонном сечении; Q_{sw} – поперечная сила, воспринимаемая поперечной арматурой.

Анализ нормативных методов расчёта

Рассмотрим случай расчёта по прочности на действие поперечной силы по наклонной трещине ЖБЭ без поперечной

арматуры ($Q_{sw} = 0$). К ним относятся второстепенные элементы (перемычки пролётом менее 2 м); элементы с поперечным распределением нагрузок, обладающие достаточной несущей способностью и не подвергающиеся действию продольных растягивающих сил [1].

Согласно нормам, действующая расчётная поперечная сила Q должна удовлетворять условию:

$$Q \leq Q_b \quad (2)$$

В обозначениях норм ЕКБ это условие записано в следующем виде:

$$V_{sd} \leq V_{Rd1} = \tau_{Rd} K(1+50\rho_e) b_w d, \quad (3)$$

где $V_{sd} = Q$; $V_{Rd1} = Q_b$; $\tau_{Rd} = R_{bt}$; $K = 1,8 - d$, где d в метрах; $b_w = b$; $d = h$; $\rho_e = \mu = \frac{A_{sc}}{b_w d}$, где R_{bt} – прочность бетона на сдвиг; b , h – геометрические размеры поперечного сечения, см; μ – коэффициент армирования.

Условия прочности (3), предлагаемое ЕКБ [1], является эмпирическим и основано на экспериментальных данных.

О.Я. Берг, рассматривая задачу о разрушении железобетонных изгибаемых элементов по наклонным сечениям, предполагал, что разрушение бетона в сжатой зоне происходит под действием усилия, равного сумме сжимающего усилия от действия изгибающего момента в расчётном сечении и поперечной силы Q ; в растянутой зоне бетон не работает, а

¹ СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения» (<https://docs.cntd.ru/document/1200095246>).

усилия растяжения воспринимаются арматурой. Под действием изгибающего момента M в поперечном сечении возникают сжимающая сила N_b , равная $N_b = M/z$, где z – плечо внутренней пары сил N_b и N_s .

При совместном действии сил Q_b и N_b формируется наклонная трещина под углом α к нейтральной оси (см. рис. 1). Из анализа силового треугольника aom можем записать:

$$\frac{Q_b}{N_b} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (4)$$

так как $\operatorname{tg} \alpha = (h_0 - x)/c$ и $N_b = R_{bt} bx = R_{bt} b \xi h_0$, где $\xi = x/h_0$ то получаем формулу:

$$Q_b = \xi_1 R_{bt} \frac{b h_0^2}{c}, \quad \xi_1 = \xi(1 - \xi), \quad (5)$$

которую предложил С.М. Боришанский для расчёта по стадии разрушения сжатой зоны наклонного сечения обычной железобетонной балки [2].

Относительную высоту сжатой зоны $\xi = x/h_0$ можно определить из решения уравнения, полученного для изгибаемого элемента с размерами поперечного сечения $A_b = b \times h$ из условий равновесия сил $N_b = N_s = R_{bt} bx$ и подобия эпюр деформаций $\varepsilon_b/\varepsilon_s = x/(h_0 - x)$.

Уравнение имеет вид:

$$\xi^2 + n\mu\xi - n\mu = 0, \quad (6)$$

где $n = E_s/E_b$; $\mu = A_s/A_b$; $\xi = x/h_0$.

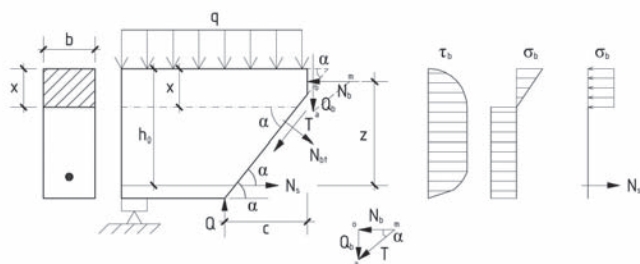


Рис. 1. Расчётная схема наклонного сечения

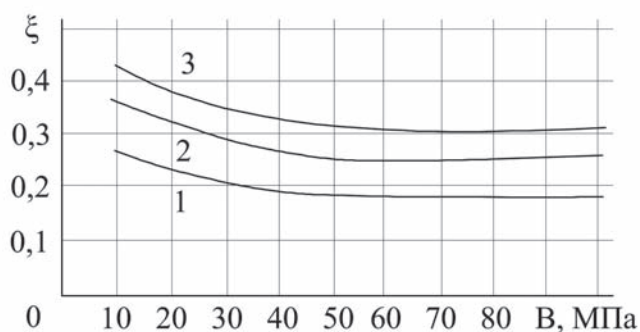


Рис. 2. Зависимость относительной высоты сжатой зоны от класса бетона B и коэффициента армирования μ : 1 – $\mu=1\%$; 2 – $\mu=2\%$; 3 – $\mu=3\%$

Относительную высоту сжатой зоны бетона изгибаемого элемента определяем из уравнения (6):

$$\xi = 0,5n\mu \left(\sqrt{1 + \frac{4}{n\mu}} - 1 \right) \quad (7)$$

На рисунке 2 показана зависимость ξ от класса бетона B и коэффициента армирования μ , при $E_s = 200 \cdot 10^3$ МПа.

В современных нормах² предложено поперечную силу, воспринимаемую бетоном Q_{b1} , определять по эмпирической формуле:

$$Q_{b1} = \frac{\varphi_{b2} R_{bt} b h_0^2}{c}, \quad (8)$$

где φ_{b2} – коэффициент, принимаемый равным 2.

Формулу (8) можно получить из анализа модели наклонного сечения, в которой предполагается, что бетон в растянутой зоне работает и напряжения растяжения достигают величины R_{bt} (см. рис. 1).

В классической теории расчета железобетонных конструкций по прочности наклонных сечений предполагается, что образование наклонных трещин и их развитие происходит под действием напряжений растяжения. Тогда из расчетной модели (см. рис. 1) можно записать:

$$Q_b = \frac{N_{bt}}{\cos \alpha} = \frac{R_{bt} b h_0}{\sin \alpha \cos \alpha} (1 - \xi) \quad (9)$$

После преобразований, получаем:

$$Q_b = \frac{R_{bt} b h_0^2}{c} \left[(1 - \xi)^2 + \frac{c^2}{h^2} \right] = \varphi \frac{R_{bt} b h_0^2}{c} \quad (10)$$

В первом случае формула (5) определяет поперечную силу Q_{b1} , воспринимаемую балкой в стадии разрушения бетона сжатой зоны. Во втором случае формула (10) определяет силу Q_{b2} из анализа модели напряжённо-деформированного состояния, соответствующего образованию трещины в растянутой зоне изгибаемого элемента.

² СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения» (<https://docs.cntd.ru/document/1200095246>).

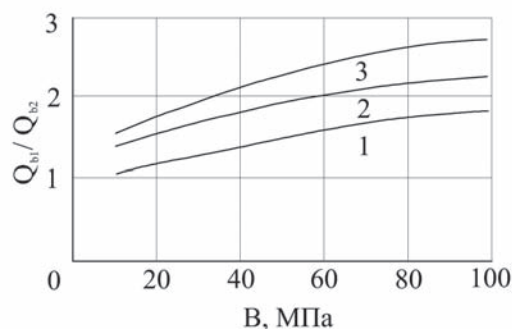


Рис. 3. Влияние процента армирования μ и класса бетона B по прочности на сжатие на величину поперечной силы Q_{b1} , где 1 – $\mu=1\%$; 2 – $\mu=2\%$; 3 – $\mu=3\%$

Обе формулы следует отнести к эмпирическим, так как оценка усилий, воспринимаемых бетоном и в первом, и во втором случае, основана на экспериментальных данных без учёта аналитического распределения по наклонному сечению изгибающих моментов, поперечных сил, касательных и нормальных напряжений.

Анализ формул (5) и (10) показывает, что разрушение изгибаемых элементов по наклонному сечению происходит от разрушения бетона сжатой зоны так как $Q_{b1} > Q_{b2}$ (см. рис. 3). Поперечная сила, воспринимаемая бетоном сжатой зоны, возрастает по мере увеличения процента армирования и класса бетона по прочности на сжатие. Графики на рисунке 3 построены при условии ($c = h_0$), что наклонная трещина развивается под углом 45° к продольной оси элемента. При этом условии соотношение $Q_{b1} > Q_{b2}$ имеет вид:

$$\frac{Q_{b1}}{Q_{b2}} = \frac{R_{bu}}{R_{bt0}} \frac{\xi(1-\xi)}{(1-\xi)^2 + 1} \quad (11)$$

Следовательно, для повышения прочности наклонных сечений необходимо повышать класс бетона по прочности на сжатие и увеличивать коэффициент армирования. Увеличение высоты сжатой зоны (ξ) отрицательно влияет на трещиностойкость наклонных сечений изгибаемых элементов.

Полученные формулы (5) и (10) для определения силы, воспринимаемой бетоном при изгибе железобетонной балки, не отвечают принципам соответствия. Согласно постулату Н. Бора, «любая новая научная теория должна включать старую теорию и её результаты как частный случай» – если в формулах (5) и (10) принять $c = 0$, то поперечная сила, следуя законам классической механики деформирования, должна быть $Q_b = R_{bt} b h_0$, а не бесконечности.

Для более полного описания процесса разрушения железобетонных изгибаемых элементов по наклонным сечениям необходимо разработать расчётную модель с учётом многомасштабности, неоднородности, инвариантности структуры бетона, действия в расчётных сечениях нормальных и касательных напряжений. По мнению А. А. Гвоздева, наклонные трещины имеют ломаную конфигурацию, а бетон в трещине – шероховатую поверхность. Поэтому при относительном смещении соответствующих точек «берегов» наклонной трещины возникают «силы зацепления» [2]. В классической механике эти силы ассоциируются с силами трения, которые в условии прочности Кулона-Навье определяются по формуле $\gamma\sigma$, где γ – коэффициент трения (сухого или внутреннего), σ – нормальное напряжение [3].

Условие прочности Кулона-Навье имеет вид:

$$[\tau] \leq R_{bt} \pm \gamma\sigma, \quad (12)$$

где τ – касательные напряжения; R_{bt} – прочность материала на сдвиг.

С учётом вышеизложенного модель разрушения бетона по наклонным сечениям будем строить исходя из следующих принципов:

1) разрушение бетона происходит под влиянием процессов, протекающих на различных масштабных уровнях и в той или иной степени зависящих друг от друга;

2) разрушение бетона – это процесс образования новых поверхностей, который можно описать из закона сохранения энергии. Энергия упругих связей переходит в поверхностную энергию;

3) разрушение бетона рассматриваем не как критическое событие, а как процесс, развивающийся во времени на трёх масштабных уровнях: образование регистрируемой микро-трещины, образование и развитие макротрещины, разрушение бетона сжатой зоны изгибаемого элемента.

Для формирования модели разрушения бетона будем использовать методы классической механики твёрдого тела; механики разрушения (по А. Гриффитсу), фрактальной геометрии (по Б. Мандельброту).

1. Модель разрушения бетона

Экспериментально установлено, что разрушение бетона – сложный эволюционный процесс, который развивается во времени и при этом на разных масштабных уровнях структуры.

А. Гриффитс предложил рассматривать разрушение хрупкого материала как процесс превращения кинетической энергии, накопленной твёрдым телом в процессе упругого деформирования, в поверхностную энергию образующихся новых поверхностей. Модель Гриффитса представлена в виде пластины единичной толщины, содержащей дефект-трещину

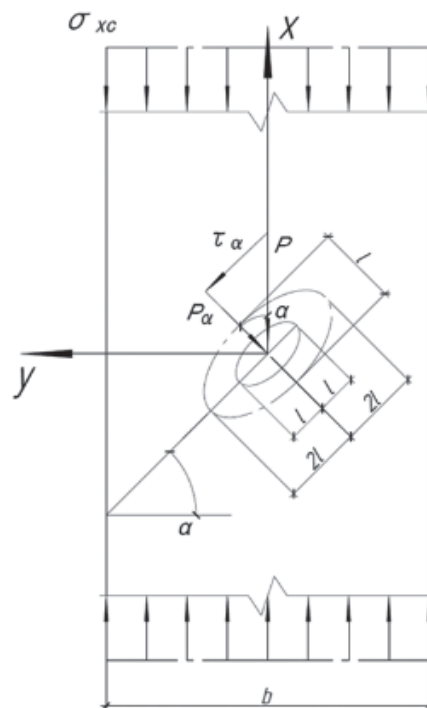


Рис. 4. Модель А. Гриффитса – пластина единичной толщины, содержащая дефект-трещину размером $2l_i$

размером $2l_i$ (см. рис. 4). С увеличением напряжения σ растёт длина трещины. Энергетический баланс тела, в котором распространяется трещина, можно записать в виде уравнения:

$$W_i = A_i - U_i = 4\gamma l_i - \pi\sigma^2 l_i^2/E, \quad (13)$$

где W_i – общая энергия структурного элемента на i -ом уровне; A_i – энергия, новых поверхностей, появление которых связано с образованием трещины длиной $2l_i$; γ – удельная плотность поверхностной энергии; E – модуль упругости; U_i – энергия релаксации упругих связей, высвобождаемая в процессе роста трещины.

Из условия $dW_i/dl_i = 0$ находим критическую длину трещины l_i на i -ом структурном уровне и соответствующие напряжения σ_i :

$$l_i = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2}; \quad \sigma_i = \sqrt{2\gamma E/\pi l_i} \quad (14)$$

Так как бетон имеет фрактальную структуру, то в представлениях геометрии Б. Мандельброта, истинный размер площади поверхности S_i на i -ом масштабном уровне a с учётом её шероховатости, неоднородности бетона, будем аппроксимировать функцией Ричардсона-Мандельброта:

$$S(\alpha) = S_e \alpha^{de-dm}, \quad (15)$$

где S_e – площадь поверхности разрушения по Евклиду $S_e = l\delta$, $\delta = 1$; de , dm – топологическая (по Евклиду) и фрактальная (по Мандельброту) размерности.

Тогда можем записать: $A_i = 4\gamma l_i \alpha^{de-dm}$.

С учётом фрактального строения структуры поверхности разрушения можем записать условия прочности для структурного элемента на i -ом уровне:

$$\sigma_i \leq \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi l_i} \alpha^{de-dm}} = \frac{K_1}{\sqrt{\pi l_i}} \alpha^{0,5(de-dm)}, \quad (16)$$

$$l_i \leq \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2} \alpha^{de-dm} = \frac{K_1^2}{\pi\sigma^2} \alpha^{de-dm}, \quad (17)$$

где K_1 – коэффициент интенсивности, вязкости разрушения.

2. Предельные состояния при расчёте прочности наклонных сечений

В общем случае при разрушении железобетонного элемента по наклонному сечению критическая (наиболее опасная) трещина может иметь произвольную ориентацию, и её развитие может происходить под действием напряжений сдвига, растяжения и сжатия.

Разрушение будем рассматривать как процесс зарождения критической трещины, её развития в растянутой зоне, разрушения по наклонному сечению сжатой зоны.

Поэтому при расчёте изгибаемого элемента по прочности наклонных сечений предлагаем рассматривать три предельных состояния.

Первое предельное состояние – по образованию микро-трещины на уровне микроструктуры – предлагаем оценивать по размеру дефекта (трещины), который сформировался в процессе изготовления и достиг критических размеров под действием напряжений от нагрузки. Критический размер дефекта d на микроуровне будем определять из условия подобия критерию Нейбера-Новожилова:

$$d_i \leq \frac{K_2^2}{\pi R_{bt}^2} \alpha^{de-dm} \quad (18)$$

Второе предельное состояние по трещинообразованию на мезоуровне (развитию критической трещины и образованию других) запишем в виде неравенства исходя из условия прочности Кулона-Навье [4]:

$$Q_{bcrc} \leq \left(1 + \frac{c^2}{h^2}\right) \frac{R_{bt}bh}{1 + \gamma \frac{c}{h}} \quad (19)$$

Третье предельное состояние по разрушению сжатой зоны на макроуровне:

$$Q_b = \left(1 + \frac{c^2}{h^2}\right) \frac{R_{bt}bh}{1 - \gamma \frac{c}{h}} \xi, \quad (20)$$

где ξ – отношение высоте сжатой зоны, определяемое по формуле (6).

Формулы (19) и (20) согласуются с постулатом Н. Бора, так как если принять $c = 0$, то $Q_b = R_{bt} bh\xi$, где $\xi = x/h$ и при отсутствии повреждений в растянутой зоне $\xi = 1$, так как $x = h$.

В терминах механики разрушения с учётом возможных дефектов структуры l_i на i -ом уровне предельные условия (19) и (20) примут вид:

$$Q_{bcrc_i} \leq \varphi_1 \frac{K_2}{\sqrt{\pi l_i}} \frac{bh}{\left(1 + \gamma \frac{c}{h}\right)}, \quad (21)$$

$$Q_{b_i} \leq \varphi_2 \frac{K_2}{\sqrt{\pi l_i}} \frac{bh}{\left(1 - \gamma \frac{c}{h}\right)}, \quad (22)$$

где $\varphi_1 = \left(1 + \frac{c^2}{h^2}\right)$; $\varphi_2 = \left(1 + \frac{c^2}{h^2}\right) \xi$.

Предлагаемые предельные условия и формулы для определения поперечной силы, воспринимаемой бетоном при изгибе, не противоречат принятым нормативным методам и дают возможность оценивать и прогнозировать развитие процесса разрушения железобетонных изгибаемых элементов по наклонным сечениям на разных стадиях.

Выводы

Разрушение железобетонных изгибаемых элементов по наклонным сечениям – это процесс, развитие которого необходимо контролировать на трёх масштабных уровнях: микроуровне – образование дефекта критического размера d ; мезоуровне – развитие наклонной трещины; макроуровне – разрушение бетона сжатой зоны.

Список источников

1. Кодекс-образец ЕКБ-ФИП для норм по железобетонным конструкциям : Т. 11 / пер. с фр. ; перевод Л. В. Еленской под ред. А. А. Гвоздева и др. – Москва : НИИЖБ, 1984. – 284 с. – Текст : непосредственный.

2. Боришанский, М.С. Расчёт отогнутых стержней и хомутов в изгибаемых железобетонных элементах на стадии разрушения / М.С. Боришанский ; предисл. и под ред. А. А. Гвоздева. – Москва ; Ленинград : Стройиздат, 1946. – 79 с. – Текст : непосредственный.

3. Тимошенко, С.П. Механика материалов / С.П. Тимошенко, Дж. Гере ; пер. с англ. Л.Г. Корнейчука ; под ред. Э.И. Григолюка. – Москва : Мир, 1976. – 669 с. – Текст : непосредственный.

4. Поперечная сила, воспринимаемая бетоном при разрушении железобетонных изгибаемых элементов по наклонным сечениям / В.П. Селяев, Д.Р. Бабушкина, Е.С. Безрукова, С.П. Селяева. – Текст : непосредственный // Региональная архитектура и строительство. – 2024. – № 4 (61). – С. 97–103.

References

1. Kodeks-obrazets EKB-FIP dlya norm po zhelezobetonnyam konstruktsiyam [CEB-FIP Sample Code for standards on reinforced

concrete structures : Translated from French], Vol. 11, per. s fr. ; perevod L.V. Elenskaya (trans. from French), A.A. Gvozdev [et al.] (ed.). Moscow, NIIZhB Publ., 1984, 284 p. (In Russ.)

2. Borishanskii M.S. Raschet otognutykh sterzhnei i khomutov v izgibaemykh zhelezobetonnykh elementakh na stadii razrusheniya [Calculation of Bent Rods and Clamps in Bent Reinforced Concrete Elements at the Stage of Destruction], A.A. Gvozdev (introduc., ed.). Moscow, Leningrad, Stroiizdat Publ., 1946, 79 p. (In Russ.)

3. Timoshenko S.P., Gere Dzh. Mekhanika materialov [Mechanics of Materials], L.G. Korneichuk (trans.from Engl.), E.I. Grigolyuk (ed.). Moscow, Mir Publ., 1976, 669 p. (In Russ.)

4. Selyaev V.P., Babushkina D.R., Bezrukova E.S., Selyaeva S.P. Poperechnaya sila, vosprinimaemaya betonom pri razrushenii zhelezobetonnykh izgibaemykh elementov po naklonnym secheniyam [The Transverse Force Perceived by Concrete during the Destruction of Reinforced Concrete Bending Elements along Inclined Sections]. In: *Regional'naya arkhitektura i stroitel'stvo* [Regional Architecture and Engineering], 2024, no. 4 (61), pp. 97–103. (In Russ., abstr.in Engl.)